大连理工大学

硕士学位论文

分数微分方程和非线性发展方程中问题的研究

姓名：余睿

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：张鸿庆

20051201

摘　要

本文研究了分数微分方程和非线性发展方程中的若干求解的方法:

1. 高维 Mittag-Leffler 函数的构造及其积分性质的研究;
2. 分数微分形式空间的研究及分数梯度，旋度和散度的构造;
3. 一种 Darboux 变换的构造及其在非线性发展方程中的应用.

第一章介绍了论文的基础知识以及前人工作的成果: 包括介绍数学机械化的思想与应用的情况; 回顾分数微积分的历史和所应用的领域; 简单介绍孤立子研究的历史、发展与成果。

第二章主要研究了分数微分方程和分数微分形式的一些问题。

(1) 介绍了分数微分方程研究的历史发展和现状并且构造了高维空间中的 Mittag-Leffler 函数, 研究了它的一些重要的积分变换, 包括 Laplace 变换, Mellin 变换, 逆 Fourier 变换，并且用它来求分数扩散 - 波动方程的基本解，还与经典的扩散和波动方程进行了对比.

(2) 介绍了分数微分形式的理论知识和发展, 并将分数微分形式和经典的微分形式作比较. 进一步，为了物理学上的需要，试图用分数外导数在分数微分形式空间中构造出分数梯度，旋度和散度.

第三章给出了 " AC=BD " 理论的基本思想和应用, 以及构造 C-D 对的理论与算法. 在这个思想的指导下，我们构造了一种 Darboux 变换，并利用这个变换给出了 (1+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统的一些新解。

关键词: 数学机械化; 分数微分方程; 分数微分形式; Mittag-Leffler 函数; Darboux 变换.

Some Problems in Fractional Differential Equations and Nonlinear Evolution Equations

Abstract

This dissertation primarily considers the following problems of fractional differential equations and nonlinear partial differential equations.

1. Construction of Mittag-Leffler type function and studies on its integral properties.

2. Some studies on the Fractional differential forms and of fractional gradient, curl and divergence.

3. Introduction of a kind of Darboux transform, and verification of its correctness by virtue of the Computational Symbolic Software Maple and display of its applications in the nonlinear evolution equations.

Chapter one involves a survey of the fundamental knowledge and achievement obtained by foregoers on the subjects for the purpose of the later parts in this dissertation, including the introduction of the history and development of mathematics mechanization, brief review of the history and status in quo of the fractional calculus and soliton theory.

Chapter two focuses on several problems of fractional differential equations and fractional differential forms:

(1) Constructs a new type of Mittag-Leffler function, gives some of its important integral transforms such as Laplace transform, Mellin transform and Inverse-Fourier transform. And then emphasizes on its application on the fractional diffusion-wave equations.

(2) Based on the ideas and work of fractional exterior derivative and fractional differential forms, compares the fractional differential forms them the standard ones. Furthermore, seeks the fractional gradient, curl and divergence in the fractional differential form space in order to meet the develop of theory in physics and finance.

Chapter three of this dissertation is devoted to introducing the essentials of "AC=BD". Also, under the guidance of such idea we try to construct a kind of Darboux transform and apply to the (1+1)-dimensional higher Broer-Kaup(HBK) system.

Keywords: Mathematics Mechanization; Fractional differential equations; Fractional differential forms; Mittag-Leffler function; Darboux function.

独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：________日期：________

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅．本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名：__________

导师签名：__________

2006 年 1 月 1 日

第一章 绪 论

§1.1 数学机械化与符号计算

回顾数学的发展历史，主要有两种思想：一个是公理化的思想，另一个是机械化的思想. 前者源于希腊，后者则贯穿整个中国古代数学. 这两种思想彼此辉映，贯穿整个数学历史，对数学的发展都曾起到了巨大的作用. 从汉初完成的《九章算术》中对开平方、开立方的机械化过程的描述，到宋、元时代发展起来的求解高次代数方程组的机械化算法，无一不与数学机械化思想有关，对数学的发展起到了巨大的作用. 公理化的思想在现代数学，特别是在纯粹数学中占据着统治地位. 但即使在现代纯粹数学的研究中，机械化的思想也一直发挥着重要的作用. Hilbert 所倡导的数理逻辑为计算机的设计原理做了准备. 数学巨匠 E. Cartan 关于微分方程、微分几何及李群的著作中也显现了机械化的特色. H. Cartan 关于代数拓扑学中同调群计算的工作也可以看作是机械化思想成功的范例.

在以计算机为标志的信息革命时代到来之际，数学应该有什么样的创新与之相适应呢？正是基于这种考虑，中国科学院院士吴文俊先生倡导数学机械化的研究 [1, 2]. 20 世纪 70 年代，吴文俊由中国的传统思想出发，从几何定理证明入手开始数学机械化研究，所建立的数学机械化方法，不仅将中国传统数学发扬光大，而且也为国际自动推理的研究开辟了新的前景. 经过近 20 年的努力，几何定理自动证明的吴方法及在其影响下产生的一系列重要的新方法，已经发展成就有我国特色在国际上领先的数学机械化理论. 这一理论已不仅在几何定理的机器证明，方程组求解，微分几何，理论物理，力学等领域得到成功应用，还为机器人学，数控技术，几何辅助设计，CAD, 计算机视觉等高科技领域提供了有力工具. 他引入的求解非线性代数方程组的吴方法是求解代数方程组精确解最完整的方法之一，已经被成功地用于解决很多问题，并实现在当前流行的符号计算软件中. 上世纪 80 年代末，在 Ritt[3, 4] 等人工作的基础上，吴先生进一步给出了吴微分消元法，提出了吴微分特征列的概念，完善和发展了特征集理论.

高小山研究员、张景中院士、周咸青教授 [5, 6] 合作提出了基于几何不变量的“消点法”，实现了自动生成几何定理可读证明这一目标. 依据这一方法编制的程序已经用于证明了数百条定理. 其中大部分的证明是简短可读的. 这一方法不仅提高了定理证明的质量，从而在理论上极大地推进了自动推理的研究，还被用来解决了 CAD, 智能 CAI(计算机辅助教学) 与机器人中的若干关键理论问题. 这一工作被认为是五十年代 Gerlentner 的经典工作及七十年代吴方法以来这一领域又一重要进展. 美国数学会“自动定理证明成就奖”及“ J. Macarthey 程序验证奖”得主 Boyer 称，该工作“是自（五十年代）Slagle 与 Moses 符号积分程序以来自动推理界最重要的一件单独的事情”. 该工作“在使计算机象

具有算术天才那样具有几何天才这一不可避免的过程中将是一座里程碑". 自动推理届权威 Loveland 在 AI Magazine 的文章中将这一工作列为近年来自动推理界"重要进展"的第一项，称"在几何中证明有意义的定理并给出可读证明（ Gelentner 五十年代的重要工作）近年来才由周咸青，高小山，张景中的几何定理证明器超过". 在几何自动推理方面，他们提出了微分几何的自动定理证明的新方法，所编程序自动证明了上百个定理并发现了新结果. 给出了 Caley-Klein 几何的转换定理大大简化了非欧几何的自动定理证明. 用自己研制的程序解决了 Zassenhaus 与 Maclane83 公开问题. 这充分说明了他们的方法的有效性. 提出了几何推理的演绎数据库方法；改进了基于搜索的定理证明方法；并第一次用此类方法证明了大量几何定理. 吴尽昭研究员、刘卓军研究员 [7, 8] 将吴代数消元法运用到逻辑中去，较好地解决了逻辑中一阶定理证明的问题. 石赫研究员 [10, 11] 利用吴代数方法，研究了著名的 Yang-Baxter 方程的解的问题. 之后，他利用张鸿庆教授提出的" AC=BD "的思想，将 Yang-Mills 方程约化为三个简单的二阶线性微分方程. 王世坤研究员、吴可研究员 [12, 13] 将吴方法应用于研究 Yang-Baxter 型（包括带参数、带色参数、带谱参数等）的解的结构问题.

李志斌教授等 [14]..[16] 利用吴代数消元法，在求解孤立子方程方面做了很多的出色工作. 李志斌教授和石赫研究员利用吴方法成功地得到了 BZ 方程的 6 种行波解. 朱思铭教授 [17] 根据 AMS 猜测，利用符号计算和吴代数消元法，对偏微分方程的 Painleve 性质进行了研究，证明了一批方程具有 P- 性质. 范恩贵教授在这方面也做了大量的工作，他推广了 tanh 方法，借助于计算机并利用吴方法得到了很多方程的精确解. 朝鲁教授运用吴微分特征集求解 Lie 对称并获得了一批对称，并给出了算法和程序，成功地将吴微分的方法运用在偏微分方程（组）的求解中.

近年来，张鸿庆教授及其课题组成员在微分代数方程的代数化和机械化方面做了大量的工作 [18]. 张鸿庆教授早在 1978 年，将代数化的思想引入了微分方程中，给出了具体的代数化算法，解决了大量力学中方程组的解的恰当性问题. 随后，证明了非齐次线性算子方程组 Au=f 的一般解为 u=Cv+e，其中 v 满足方程组 Dv=g， D 是对角矩阵，用代数方法给出了 C、 D、 e 的具体构造方法. 用此方法可以给出各种弹性力学位移函数和应力函数的机械化算法，构造数学物理中一系列方程的一般解. 基于吴微分消元理论，给出了" AC=BD "除法，利用这一除法，可以得到一些方程的变换，进而通过变换求解方程. 闫振亚博士 [19]，陈勇博士 [20] 在微分方程的求解代数化方面做了大量的工作. 他基于两种 Riccati 方程，提出了新的求解非线性微分方程的更有效的方法，获得了丰富的精确解. 最近，我们课题组成员又将吴方法与" AC=BD "理论相结合，编制了广义 tanh 方法求解，广义 Riccati 方程展开法求类孤立子解， Lie 对称及其 Painleve 检验软件包. 郑学东硕士 [21]，完成了三角函数方法求精确的软件包，广义 tanh 函数求解的软件包，和 Painleve 检验的程序包；吕卓生博士完成了 Lie 对称的程序编制.

计算机代数 (Computer algebra 或 Symbolic and algebra computation) 兴起于上世纪 60 年代初，是介于计算机，数学与人工智能之间的一门边缘学科，计算机代数的主要研究内容是计算机上数学公式演绎的算法和系统应用．其发展，大致可分为以下几个阶段 [22]:

1. 20 世纪 60 年代：发展初期，着重于多项式算术，积分方法；

2. 20 世纪 70 年代：诞生了 *Macsyma, Reduce,* 以及用于抽象域的 *Scratchpad/II;*

3. 20 世纪 80 年代：多项式时间方法，因式分解等的研究， *Maple* 与 *Mathematica* 相继发布，

4. 20 世纪 90 年代：微积分，数学的 Web 发布，黑箱符号对象；

5. 本世纪初：符号计算，数值计算，几何，组合与逻辑范例的融合.

计算机代数的主要功能在于：在计算机上以符号形式进行运算，实现公式的机器推演. 如果和初等数学相比，寻常的数值计算可比拟为数值计算，而符号计算可比拟为代数运算(故有计算机代数之说). 前者只适合于个例分析，后者的结果则具有普遍性. 由于计算机代替了人工的推导，演算速度成千万倍地增加，使得原来令人望而生畏的复杂计算变得简易快洁. 在最初的十几年间，计算机代数也被叫做：符号与代数计算、公式处理、机器代数等. 于是在 1979 年，美国加州理工学院的教授统一了计算机代数的名称和定义："计算机代数是一门利用数学、计算机进行代数和解析处理或操作的学科". 1982 年，德国卡尔斯鲁厄大学的 R. Loose 教授又进行了进一步的拓广和补充："计算机代数是设计、分析、改造和应用代数算法的计算机科学分支". 计算机代数的最早出现公认以 1960 年美国麻省理工学院的 Mccarthy 推出的 Lisp 语言为标志. 在随后的十几年间，计算机代数的发展引起了国际计算机科学界的重视. 美国的计算机协会组织了符号与代数处理专业组 (Special interest Group on Symbolic and Algebraic Manipulation，简称 SIGSAM)，其成员遍布世界 30 多个国家. 这个国际组织每两年召开一次国际会议 (简称 ISSAC)，专门交流计算机代数方面的研究成果. 西欧各国计算机工作者组织了欧洲符号和代数处理专业委员会 (Symbolic and algebraic Manipulation of European，简称 SAME)，定期召开简称 AAECC 的国际会议. 这两大组织还分别创办了计算机代数刊物 SIGAM Bulletin 和 Journal of Symbolic computation . 这些学术活动大大地推动了计算机代数的发展.

在过去的三十几年间，计算机代数取得了诸多的成就 [23] . Risch [24] 证明了：数学函数在闭形式下的积分问题是可判定的. Berlekamp [25] 给出了有效分解多项式 (模一个大素数) 的随机化算法. 因为多项式的系数域的不同，这时需要给出一个更一般的算法. 在上个世纪的七十年代的早期， Berlekamp 给出了这个代数算法在抽象代数域上的更一般的程序. Brown[26] 给出了新的有效的多元多项式最大公因子的符号计算方法. Gosper[27] 对于无限超几何和给出了一个精巧的算法. Lenstra et al [28, 29] 的 Lovasz's 的格点约化算法，是具有深远意义的 Euclidean 算法的一般化，最初是作为一个多项式分解的子算法出现的. 稀疏多元多项式的差补算法 [22](其中一部分是基于修正误差码的) 已经变成了在

计算黑匣子多项式中的基本工具 (Kaltofen & Trager[30]), 1995 年, Shoup[31] 在修改了由 Kaltofen & Shoup 给出的关于一元多项式 (系数在有限域上) 的分解算法后，使这个算法更加实用化. 特别是在上个世纪的 90 年代，借助于一些符号计算软件工具，计算机代数的发展更加迅猛，而且不断地应用到其他领域，如高能物理、天体力学、广义相对论、电子光学、分子物理、自动化、航空学、生物学和化学等等.

§1.2 分数微积分历史和发展概况

数学是一门美丽的自然语言，但它却常常会向我们传递一些误导人的信息. 比如说我们常用的自然数和实数 — 自然数其实并不自然，绝大多数的实数在现实生活的计算中也并不是真实存在的. 分数微积分这个概念也是这样一个"名不符实"的数学名词：它不是指分数的微积分，也不是光指分数阶的微积分学，而是代表任意阶积分和微分的名词，并且推广、统一了整数阶

分数微积分的发展历史几乎与整数阶微积分的发展史相同，自从分数导数的想法最早由 L'Hospital 于 1695 年给 G.W.Leibnitz 的一封信中提出，人们对这个学科的兴趣就从未停止过. 尽管 Euler 、 Lagrange 和其它的数学家曾经在更早的时期在这方面做出了贡献，但是这方面最早的系统研究则是由 Liouville 、 Riemann 以及 Holmgren 在 19 世纪初叶与中叶完成的. 最早是 Liouville 将函数展开成指数形式，并通过逐项运算定义了这种展开形式的 q 阶导数 (这里 q 是正整数). Riemann 提出了一种不同的定义 (对给定的整数), 这个定义可以应用于带有负幂次项的幂级数形式. 最后是 Grunwald 和 Krug 第一次将 Liouville 和 Riemann 的定义统一了起来. 参见 [32, 33, 34] .

与这些理论的起始阶段平行，对各种各样的问题分数微积分的应用取得了发展. 在一定意义上，分数微积分最初是由 Abel 于 1823 年发现的，他发现对于 tautochrone ，其积分方程的解可以通过一个积分变换得到，正如我们将要看到的那样，这主要得益于问题被写成半导数的形式. 用分数微积分解决问题的一个强有力的触动来自于 Boole 的符号方法的发展， Boole 用这种方法来求解常系数的线性微分方程. Boole 思想的本质是将微分算子展开成任意函数的形式幂级数，于是微分方程的解就是这些级数的形式逆. 这种方法对某些特定的函数类的要求特别严格，而且已经在许多方面都得到了推广.

然而，由于长期没有得到实际应用背景的促进而发展缓慢，直到 Heaviside 发展了算子微积分，用于求解某些电磁理论方面的问题，是广义导数应用发展中具有重要意义的步骤. Heaviside 在对传输线理论中的研究中引进了分数微分的概念，这个概念由 Gemant 所推广，用于弹性理论的研究. 尽管 Heaviside 似乎看不起 " wet blankets of rigorists " (严谨化的意义)，但是一些理论家意识到了 Heaviside 工作的优秀方面，并且试图在为人所接受的数学标准方面对其进行改进. 1982 年， B.B.Mandelbrot 首次指出自然界和许多技术科学中存在大量分数维的事实 [35]–[37] ，并在整体与部分之间存在自相似现象之后，分

数微积分成为了研究分形几何和分数动力学的有力工具 [38]-[43]．并且在松弛 [44]-[46]、振荡 [47]、扩散和输运理论 [48]-[51]、生物组织 [52]-[55]、高分子材料的解链 [52]-[56]、混沌与湍流 [57],[58]、随机游走 [59]-[61]、统计与随机过程 [62]-[63]、粘弹性力学以及非牛顿流体力学 [57],[64],[65] 等诸多领域得以应用，而这些领域的应用反过来又促进了分数微积分的理论研究的进一步发展，成为了当前国际上的一个热点研究课题．

众所周知，微分形式在物理、微分几何、应用数学领域得到广泛的应用．许多偏微分方程能用微分形式来表达．近年来，通过将其建立在不同的分次代数的基础上，在文献 [34] 中，外微积分又被拓展另一种企图拓展是基于非结合几何而建立的 [66]．最近， Kathleen 和 Mark 在分数微积分方面作了大量出色的工作．2001 年， Kathleen 和 Mark 给出了分数外导数的定义 [67]，且发现了分数微分形式空间为有限维和无穷维向量空间．闭形式和恰当形式被推广到新的分数形式空间，并且在特殊情形下得出了闭的可积条件．此外还得到了坐标变换规律，陈勇教授之后又给出了从卡氏坐标到曲面坐标变换 [20]．Kathleen 和 Mark 又对分数微积分形式作了进一步的研究，特别地考虑了分数微分形式空间的有限维子空间．并且定义了内积，偶积和协变导数．计算了积分阶形式的转换规律，并用矩阵阶分数微积分定义了矩阵阶形式从而产生了矩阵阶形式的坐标转换规则和协变导数．同时还指出，除了矩阵阶是非对角情形外， Poincaré 定理对所有阶数的外分数微积分都是正确的．

§1.3　孤立子理论研究概述

孤立子 (Soliton) 现象最初是由英国科学家 Scott Russell 发现的． 1844 年， Russell 在一篇题为《论波动》的报告中记述了他 1834 年观察到的一种奇特的水波现象．当时他正在观察由两匹马拉着的船在一条狭窄的运河中行驶．船突然停止了前进，但运河中被船推动的水却并没有停止，而以汹涌翻腾的状态聚集在船头，然后以巨大的速度滚滚向前，且保持着巨大的轮廓分明的光顺孤立的峰状外形．显然，它不改变形状与速度，沿运河继续前进．他骑着马跟踪了一至两英里，在运河的拐弯处，这种孤立行进的水峰才终于消失． Russell 认识到这种水波现象是具有关键性质的新现象、新事物，随后进行了更加细致的研究，在实验室作了很多实验，用多种方法激发，也观察到了同样的现象．他称这种波为孤立波 (Solitary wave)．但限于当时的数学理论和科学水平，人们无法从理论上给予这种现象一个圆满的解释，科学家们甚至怀疑孤立波现象是否真正存在．

在随后的几年， Airy 、 Boussinesq 和 Rayleigh 等人相继对孤立波进行了研究． Airy 得出结论： Russell 所提到的孤立波根本不存在； Stokes 使用了正确的方程，却得到了错误的结果； Boussinesq 和 Rayleigh 分别从数学角度证明了孤立波的存在性． Boussinesq 为近似描述孤立波，提出了一个非线性发展方程，后来被命名为 Boussinesq 方程．但是， Boussinesq 和 Rayleigh 的工作仍然没有使那些对孤立波感兴趣的科学家们完全信服．这

也促使荷兰数学家 Korteweg 和他的博士生 de Vries 对水波现象作进一步研究.

1895 年， Korteweg 和 de Vries 根据流体力学研究了浅水波的运动，在长波近似和小振幅的假定下，求得了单向运动的浅水波运动方程，即著名的 KdV 方程. 通过一定的数学变换， KdV 方程变为如下形式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.3.1}$$

其中 u 为波形函数. Korteweg 和 de Vries 从上式求出了与 Russell 所发现的孤立波现象一致的结果，即具有不变形状的脉冲状孤立波解. KdV 方程的解，准确地描述了浅水波的非线性特性：行波速度依赖于其本身的振幅，当两个这样的脉冲波沿着同一方向运动时，波峰高的脉冲波的行进速度快，因此会赶上前面波峰低的波而发生碰撞.

然而这样的孤立波是否稳定，两个这样的孤立波碰撞后是否形变，这一直是科学家们感兴趣而又无法证实的问题. 因此在没有新的发现之前， KdV 方程以及孤立波仍长期处于被埋没之中.

1965 年美国普林斯顿（ Princeton ）大学的两位应用数学家 M. D.Kruskal 和 N.Zabusky 通过数学模拟方法深入地研究了等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程. 他们意外地发现，两个孤立波在碰撞后各自的波形与行进速度居然都能保持不变，仅仅是相位发生了改变. 这一性质使人们联想起质点粒子和波粒二象性等熟悉的现象. 只有粒子的碰撞才会有类似的情形出现，于是将这种波定名为孤立子（ Soliton ），以反映其粒子属性.

“孤立子”没有明确的定义，但是它可用来描述一个非线性方程或非线性体系的任意解，若此解满足： 1. 可表示成一个固定形式的波； 2. 是局部的、衰变的或在无穷大时变为常数； 3. 可与其他的孤子进行强烈的相互作用，在相互作用后即使叠加原理成立其形式亦不会改变.

总之， Kruskal 和 Zabusky 的这一研究工作为推动孤立子理论的发展，树立了一个重要的里程碑. 此后，科学家们对孤立子的研究兴趣和热情便一发难收，在很多学科领域都发现了孤立子运动形态，相应地，在数学上，发现了一大批具有孤立子解的非线性发展方程，而且已逐渐建立起较系统的研究孤立子的数学物理方法 [69, 70, 71, 72].

目前，较为完整的孤立子理论体系正在逐步形成，国内外在这方面出版了很多专著 [69, 71, 72]. 孤立子理论已经被应用于解决等离子体物理、凝聚态物理、生物学和非线性光学等领域中某些难以解决的问题，以及非线性作用下的运动规律等. 从数学方面来看，已经发现一大类非线性发展方程具有孤波解，求解方法也出现了许多独特的分支.

第二章　分数微分方程以及分数微分形式

§2.1　分数微分方程及其应用

分数微分方程简介

我们在绪论中已经介绍分数微积分是指任意阶的积分和微分的理论，它推广并统一了整数阶微分和积分的概念. 让我们来考虑 n 重积分和导数的序列：

$$....\int_a^t d\tau_2\int_a^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1)d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, ... \tag{2.1.1}$$

任意 α 阶的导数可以考虑从这样的算子序列引申出来，并由 Davis[73] 建议记作：

$$_aD_t^\alpha f(t). \tag{2.1.2}$$

这个任意阶导数也简称分数导数. 其中下角标 a 和 t 表示分数微分运算运算的两个极限；也被 Ross 称作分数微分的端点 [66]. 同样地分数积分表示任意阶的积分，对应一个负数的阶数. 可以记作：

$$_aD_t^\beta f(t), \beta > 0. \tag{2.1.3}$$

分数微分方程就是带有分数导数的方程；分数积分方程就是带有分数积分的方程；一个分数阶的系统是指由分数微分或分数积分方程描述的系统 [74]. 在分数微积分的发展史中，关于分数导数和积分有不同的定义，主要有：Grünwald-Letnikov 定义，Riemann-Liouville 定义 [74]， Caputo 意义下的定义 [75] 和广义函数法 ([76],ch6). 限于篇幅不将一一列举. 为了介绍分数数积分和微分方程，我要重点介绍 Caputo 的定义. 虽然 Riemann-Liouville 定义在分数微积分的发展历史中起到了相当大的作用，尤其是在纯数方面，但是它逐渐不能满足现代的科学技术要求. 例如在粘弹性力学和固体力学中，分数导数是用来描述材料的性质的，而且建立在流变学的基础上的数学模型很自然地引出带有初值条件的分数微分方程. 这些应用的问题要求分数导数的定义允许使用带有实际意义的初值条件，例如未知函数及其整数阶导数的初值条件. 然而， Riemann-Liouville 导数的定义下，未知函数分数导数在初值点的值 (或极限值) 是常数. 而 Caputo 导数表示的分数微分或积分方程可以得到与整数阶的微分和积分方程相似的初值条件，也就是说未知函数的分数导数包含未知函数及其整数阶导数 (在后面的分数扩散 - 波动方程中可以很好的体现)

Caputo 的关于分数导数的定义 [75] 如下：

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, \qquad (n-1 < Re(\alpha) \le n, n \in N) \tag{2.1.4}$$

其中参数 α 是求导的阶数，可以是实数阶甚至是复数阶； a 是函数 f 的初值（在本文中将只考虑 α 为正实数阶的情形）。在 Caputo 导数的定义下的我们可以得到：

$$\frac{\partial^\alpha C}{\partial t^\alpha} = 0, \qquad (C \text{ is a constant}) \tag{2.1.5}$$

这一点不同于 Remann-Liouville 的定义，因为在 R-L 定义下的分数导数对常数求导往往不等于 0 .

$$\frac{\partial^\alpha x^\beta}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} 0, & (\beta \le \alpha - 1) \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, & (\beta > \alpha - 1) \end{cases} \tag{2.1.6}$$

类似于整数阶导数的性质，当 $f(\tau)$ 在 [a,t] 连续，且 $\varphi(\tau)$ 在 [a,t] 有 $n+1$ 阶连续导数时，Caputo 分数导数同样满足线性和 Leibniz 法则：

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t) + \mu \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} g(t); \tag{2.1.7}$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}(\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(t) \frac{\partial^{\alpha-k}}{\partial t^{\alpha-k}} f(t), \tag{2.1.8}$$

其中 λ, μ 是常数.

Caputo 分数导数的 Laplace 变换和 Fourier 变换为：

$$\mathscr{L}\{\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t); s\} = s^\alpha \mathscr{L}\{f(t); s\} - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-k-1}, \tag{2.1.9}$$

和

$$\mathscr{F}\{\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t); \omega\} = (-i\omega)^{\alpha-n} \mathscr{F}\{f^{(n)}(t); \omega\}. \tag{2.1.10}$$

求解一般的分数微分方程的一种最有效的方法是 Laplace 变换法，它是基于 Laplace 变换技巧和双参数的 Mittag-Leffler 函数（参见下一节）的 Laplace 变换公式的一种方法.

Mittag-Leffler 型函数

我们知道指数函数 e^z 在整数阶的微分和积分方程中起到了十分重要的作用. 同样，它的参数推广， Mittag-Leffler 型函数在解分数微分和积分方程中也起到了重要的作用. M-L 型函数很自然地起源于积分方程的解，尤其是广泛地应用在动力方程，随即游走，lévy 飞行，和所谓的超扩散运输方程的分数推广方程中. 近来，M-L 型函数的重要性逐渐被认识，而且被更多地关注. 不仅是从解析的观点，而且从数值分析的观点，还包括用于描述分数控制系统，分数粘弹性模型等等很多方面. 它们的定义以及性质在最近的关于分数微积分，分数扩散方程和积分方程，力学方面的书籍和综述中可以找到 [38, 74, 77] .

Mittag-Leffler 是一个整函数，在 [77] 中定义如下：

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0) \tag{2.1.11}$$

它是 $e^z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}$ 的单参数推广. 同样地， M-L 型函数的双参数的定义 [77] 为

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\qquad(\alpha>0,\beta>0)\tag{2.1.12}$$

自然地我们得到了如下结果:

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,\tag{2.1.13}$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z},\tag{2.1.14}$$

$$E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2},\tag{2.1.15}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})dt=\frac{1}{1-z}.\quad(|z|<1)\tag{2.1.16}$$

令 $\beta=1$ 我们可以得到函数的单参数形式:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}=E_{\alpha}(z).\tag{2.1.17}$$

为了求解有理阶微分方程，文 [76] 提出了如下函数

$$\varepsilon_t=t^{\nu}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{\Gamma(\nu+k+1)}=t^{\nu}E_{1,\nu+1}(at).\tag{2.1.18}$$

Mittag-Leffler 函数在分数微分方程中的应用

我们知道扩散方程，波动方程是数学物理方程的基本方程，它在多门学科中都有重要的应用. 随着应用的需要，在物理，金融，光学以及生物学等诸多方面出现了用带有任意阶时间和空间导数的分数微分方程描述的模型. 其中最重要的基于 Lévy 随机游走和分数布朗运动的分数扩散方程. 虽然对于一系列的分数扩散 - 波动方程 (FDWE) 已经有了十分合理的物理解释，但是它们的初值和边界问题的解并没有给出. 为了解决这个问题 - 找到所谓的基本解，我们在高维空间中定义了推广的 M-L 型函数并且给出了它的许多的重要的积分变换. 同时得到了一些有用的结果.

这种新的 M-L 型函数定义如下:

$$\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma)=t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-D|y|^{\gamma}t^{\alpha}),\tag{2.1.19}$$

其中 t 代表时间变量； y 代表空间变量，记作: $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$; α,β,γ 可以为任意实数阶且 D 是有一定物理解释的物理常数.

我们发现这种形式的函数已经频繁地应用在求解动力系统，分数控制，和分数扩散 - 波动方程的 Laplace 方法中. 然而由于没有现成的公式表和手册可以查到该函数的 Laplace 变换， Fourier 变换以及相关变换，而且计算非常复杂，我们给出了它的一些重要的积分变换.

函数 $\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma)$ 关于时间变量 t 的 Laplace 变换为：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma);p\} &= \int_0^\infty e^{-pt}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-D|y|^\gamma t^\alpha)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-pt}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-D|y|^\gamma t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty\frac{(-D|y|^\gamma)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^\infty e^{-pt}t^{\alpha k+\beta-1}dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty\frac{(-D|y|^\gamma)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\Gamma(\alpha k+\beta)p^{-(\alpha k+\beta)} \\ &= \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha+D|y|^\gamma}\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma)$ 函数的关于时间变量 t 的 Mellin 变换可以通过公式

$$\mathscr{M}\{f(x);s\} = \frac{1}{\Gamma(1-s)}\mathscr{M}\{\mathscr{L}\{f(x);p\};1-s\}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\{\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma);s\} &= \mathscr{M}\{\mathscr{L}\{\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma);p\};1-s\} \\ &= \mathscr{M}\{\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha+D|y|^\gamma};1-s\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^\infty p^{-s}\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha+D|y|^\gamma}dp \\ &= \frac{(D|y|^\gamma)^{\frac{1-\beta-s}{\alpha}}}{\alpha\Gamma(1-s)}B(\frac{\beta+s-1}{\alpha},1+\frac{1-\beta-s}{\alpha}),\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

其中 $B(\frac{\beta+s-1}{\alpha},1+\frac{1-\beta-s}{\alpha})$ 是 Beta 函数.

$\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma)$ 函数的关于高维空间变量的逆 Fourier 变换十分复杂：

$$\bar{\varepsilon}(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = \mathscr{F}^{-1}\{\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma);x\} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}e^{-ix\cdot y}\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma)d^ny, \tag{2.1.22}$$

其中是 x,y 高维空间变量，记作： $x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...y_n)\in R^n$
上式很难用通常的积分变换直接得到结果. 所以我们利用 Mellin 变换和特殊函数的技巧对它进行约化.

关于时间 t，我们先对上式的两边进行 Mellin 变换:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\{\bar{\varepsilon}(t,x;\alpha,\beta,\gamma);s\} &= \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{M}\{\varepsilon(t,x;\alpha,\beta,\gamma);s\};x\} \\ &= \mathscr{F}^{-1}\{\frac{(D|y|^{\gamma})^{\frac{1-\beta-s}{\alpha}}}{\alpha\Gamma(1-s)}B(\frac{\beta+s-1}{\alpha},1+\frac{1-\beta-s}{\alpha});x\} \\ &= \frac{D^{\frac{1-\beta-s}{\alpha}}}{\alpha\Gamma(1-s)}B(\frac{\beta+s-1}{\alpha},1+\frac{1-\beta-s}{\alpha})\mathscr{F}^{-1}\{|y|^{\frac{\gamma(1-\beta-s)}{\alpha}};x\}\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

其中 s 是一复变量, 满足 $s_1 < Re(s) < s_2$ (s_1, s_2 是实数) . 对空间变量 $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ 作正交变换和球坐标变换，我们可以得到:

$$\mathscr{F}^{-1}\{|y|^{\frac{\gamma(1-\beta-s)}{\alpha}};x\} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma(1-\beta-s)}{\alpha}}J_{\frac{n}{2}-1(\rho|x|)}d\rho, \tag{2.1.24}$$

其中 $\rho=|y|, J_{\frac{n}{2}-1(\rho|x|)}$ 是第一类 $(\frac{n}{2}-1)$ 阶 Bessel 函数．利用第一类 Bessel 函数的积分性质 $\int_0^{\infty}t^{\mu-1}J_{\nu}(bt)dt = 2^{\mu-1}\frac{\Gamma(\frac{\nu+\mu}{2})}{b^{\mu}\Gamma(1+\frac{\nu-\mu}{2})}$ 我们可以得到:

$$\mathscr{F}^{-1}\{|y|^{\frac{\gamma(1-\beta-s)}{\alpha}};x\} = (\frac{2}{|x|})^{\frac{\gamma(1-\beta-s)}{\alpha}}\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^n}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{\gamma(1-\beta-s)}{2\alpha})}{\Gamma(\frac{\gamma(\beta+s-1)}{\alpha})} \tag{2.1.25}$$

将 (2.1.22) 式代入 (2.1.20) 式我们得到:

$$\mathscr{M}\{\bar{\varepsilon}(t,x;\alpha,\beta,\gamma);s\} = \frac{(2^{\gamma}D)^{\frac{1-\beta-s}{\alpha}}}{\alpha\pi^{\frac{n}{2}}|x|^{n+\frac{\gamma(1-\beta-s)}{\alpha}}}\frac{\Gamma(\frac{\beta+s-1}{\alpha})\Gamma(1+\frac{1-\beta-s}{\alpha})\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{\gamma(1-\beta-s)}{2\alpha})}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{\gamma(\beta+s-1)}{2\alpha})}, \tag{2.1.26}$$

在对上式进行逆 Mellin 变换产生:

$$\bar{\varepsilon}(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = \mathscr{F}^{-1}\{\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma);x\}$$

$$= \frac{1}{\alpha(\sqrt{\pi}|x|)^n}(\frac{2^{\gamma}D}{|x|^{\gamma}})^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\frac{|x|^{\gamma}}{2^{\gamma}Dt^{\alpha}})^{\frac{s}{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{\beta+s-1}{\alpha})\Gamma(1+\frac{1-\beta-s}{\alpha})\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{\gamma(1-\beta-s)}{2\alpha})}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{\gamma(\beta+s-1)}{2\alpha})} \tag{2.1.27}$$

其中 $c_1 < Re(c) < c_2$(c_1, c_2 是实数); 上式中的积分路线是 Bromwich 积分线．对比 Fox's H 函数 (详见 [78] 的附录) 的定义，可以知道:

$$\bar{\varepsilon}(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{t^{\beta-1}}{\alpha(\sqrt{\pi}|x|)^n}(\frac{2^{\gamma}Dt^{\alpha}}{|x|^{\gamma}})^{\frac{1-\beta}{\alpha}}H_{2,3}^{2,1}(\frac{|x|^{\gamma}}{2^{\gamma}Dt^{\alpha}}\,|_{(1-\frac{\beta-1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}),(\frac{n}{2}-\frac{\gamma(\beta-1)}{2\alpha},\frac{\gamma}{2\alpha}),(1-\frac{\gamma(\beta-1)}{2\alpha},\frac{\gamma}{2\alpha})}^{(1-\frac{\beta-1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}),(1,1)}), \tag{2.1.28}$$

其中 $H_{2,3}^{2,1}(\frac{|x|^{\gamma}}{2^{\gamma}Dt^{\alpha}}\,|_{(1-\frac{\beta-1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}),(\frac{n}{2}-\frac{\gamma(\beta-1)}{2\alpha},\frac{\gamma}{2\alpha}),(1-\frac{\gamma(\beta-1)}{2\alpha},\frac{\gamma}{2\alpha})}^{(1-\frac{\beta-1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}),(1,1)})$ 是 Fox's H 函数．根据文 [78] 附录中的公式 (A.7)(A.8) 可以写作:

$$\bar{\varepsilon}(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = \mathscr{F}^{-1}\{\varepsilon(t,y;\alpha,\beta,\gamma);x\} = \frac{t^{\beta-1}}{\sqrt{\pi}|x|^n}H_{2,3}^{2,1}(\frac{|x|^{\gamma}}{2^{\gamma}Dt^{\alpha}}\,|_{(1,1),(\frac{n}{2},\frac{\gamma}{2}),(1,\frac{\gamma}{2})}^{(1,1),(\beta,\alpha)}), \tag{2.1.29}$$

下面看看新构造的这一类函数的应用:

通常的分数扩散 - 波动方程可以表示为：

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = -D(-\triangle)^{\frac{\gamma}{2}}u, \qquad (0 < \alpha, \gamma \le 2), \tag{2.1.30}$$

其中 $\triangle^{\frac{\gamma}{2}}$ 代表分数 Laplace 算子，在 ([80],(20)) 中第一次利用 Fourier 变换给出定义：

$$\mathscr{F}\{(-\triangle)^{\frac{\gamma}{2}}u(t,x;\alpha,\gamma);\omega\} = |\omega|^\gamma \mathscr{F}\{u(t,x;\alpha,\gamma);\omega\}$$

其中 D 代表一个物理常数， α, β 可以是任意实数．相关的工作可以参见 [81, 82, 83, 84]．

现在我们在 n 维空间 $(n \ge 1)$ 内考虑初值 - 边界问题：

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(t,x;\alpha,\gamma) = -D(-\triangle)^{\frac{\gamma}{2}}u(t,x;\alpha,\gamma), \qquad (t > 0, x \in R^n, m-1 < \alpha \le m) \tag{2.1.31}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(t,x;\alpha,\gamma) = 0; \frac{\partial^k}{\partial t^k}u(0,x;\alpha,\gamma) = f_k(x). \qquad (k = 0,1,...,m-1) \tag{2.1.32}$$

其中的分数时间和空间导数都是 Caputo 定义下的导数．

考虑边界条件，方程两边同时对时间变量 t 进行 Laplace 变换，对空间变量 x 进行 Fourier 变换可以得到：

$$\bar{U}(p,\omega;\alpha,\gamma) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} F_k(\omega)p^{\alpha-1-k}}{p^\alpha + D|\omega|^\gamma}, \tag{2.1.33}$$

其中 $\bar{U}(p,\omega;\alpha,\gamma)$ 是 $u(t,x;\alpha,\gamma)$ 的 Fourier-Laplace 变换． $F_k(\omega)$ 是 $f_k(x)$; p 的 Fourier 变换， p 是 Laplace 变换参数， ω 是 Fourier 变换参数．利用 (2.1.20) 式，容易看出：

$$\bar{u}(t,\omega;\alpha,\gamma) = \sum_{k=0}^{m-1} F_k(\omega)\varepsilon(t,\omega;\alpha,k+1,\gamma). \tag{2.1.34}$$

其中 $\bar{u}(t,\omega;\alpha,\gamma)$ 是 $u(t,x;\alpha,\gamma)$ 关于参数 ω 的 Fourier 变换．再对上式进行逆 Fourier 变换可以得到方程 (2.1.31)-(2.1.32) 的解：

$$u(t,x;\alpha,\gamma) = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{R^n} f_k(\xi)G_k(t,x-\xi)d\xi, \tag{2.1.35}$$

其中

$$G_k(t,x) = \mathscr{F}^{-1}\{\varepsilon(t,\omega;\alpha,k+1,\gamma);x\}. \tag{2.1.36}$$

正如整数阶的情形， $G_k(t,x)$ 也可以叫做分数扩散 - 波动方程的基本解．利用 (2.1.29) 式我们可以得到：

$$G_k(t,x;\alpha,\gamma) = \frac{t^k}{(\sqrt{\pi}|x|)^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma D t^\alpha}\,\Big|^{(1,1),(k+1,\alpha)}_{(1,1),(\frac{n}{2},\frac{\gamma}{2}),(1,\frac{\gamma}{2})}\right), \quad (k = 0,1,...,m-1). \tag{2.1.37}$$

进一步地，利用特殊函数的性质我们可以得到数学物理方程的很多经典结果.

1.$\gamma=2$： (2.1.31)-(2.1.32) 可以约化为:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(t,x;\alpha,\gamma)=D\Delta u(t,x;\alpha,\gamma), \qquad (t>0, x\in R^n, m-1<\alpha\le m) \tag{2.1.38}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}u(t,x;\alpha,\gamma)=0; \frac{\partial^k}{\partial t^k}u(0,x;\alpha,\gamma)=f_k(x). \qquad (k=0,1,...,m-1) \tag{2.1.39}$$

这就是带有分数时间导数的分数扩散 - 波动方程 [85]，直接从式 (2.1.37)，我们可以可到

$$G_k(t,x;\alpha,2)=\frac{t^k}{(\sqrt{\pi}|x|)^n}H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4Dt^\alpha}\,\Big|^{(k+1,\alpha)}_{(1,1),(\frac{n}{2},1)}\right), \quad (k=0,1,...,m-1) \tag{2.1.40}$$

这个结果与文 [85] 中的结果一致.

特别地，当 $n=1$ 时，我们得到:

$$G_k(t,x;\alpha,2)=\frac{1}{2\sqrt{D}t^{\frac{\alpha}{2}-k}}W\left(-\frac{|x|}{\sqrt{D}t^{\frac{\alpha}{2}}};-\frac{\alpha}{2},1+k-\frac{\alpha}{2}\right). \quad (k=0,1,...,m-1) \tag{2.1.41}$$

它与文 [85],[47] 研究得到的结果一致.

$k=0$，我们有:

$$G_0(t,x;\alpha,2)=\frac{1}{2\sqrt{D}t^{\frac{\alpha}{2}}}W\left(-\frac{|x|}{\sqrt{D}t^{\frac{\alpha}{2}}};-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right), \tag{2.1.42}$$

它可以被称作分数 Green 函数 [79].

当 $\alpha=1$ 时，上式就可以约化成经典的表达式:

$$G_0(t,x;1,2)=\frac{1}{2\sqrt{Dt}}W\left(-\frac{|x|}{\sqrt{Dt}};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{D\pi t}}exp\left(-\frac{|x|^2}{4Dt}\right). \tag{2.1.43}$$

它就是我熟知的扩散方程:

$$\frac{\partial u(t,x;\alpha,\gamma)}{\partial t}=D\Delta u(t,x;\alpha,\gamma). \tag{2.1.44}$$

的 Gaussian 分布解，参见 [85].

当 $\alpha=2, k=1$ 时，从 (2.1.37) 我们又可以得到经典的波动方程的基本解

$$G_1(t,x;2,2)=\begin{cases}0, & \text{if } n \text{ is an odd greater than one,}\\ \frac{(-1)^{(l-1)}1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)}{\sqrt{D}(2l-1)(2\pi)^l(Dt^2-|x|^2)^{\frac{n-1}{2}}}, & \text{if } n=2l \text{ is an even where } l\in N\end{cases} \tag{2.1.45}$$

2.$\alpha=1$：方程 (2.1.31)-(2.1.32) 又可以化简为:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x;1,\gamma)=-D(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}u(t,x;1,\gamma), \qquad (t>0, x\in R^n) \tag{2.1.46}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(t,x;1,\gamma)=0;\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(0,x;1,\gamma)=f_k(x). \qquad (k=0)\ A\#, \tag{2.1.47}$$

该方程是通过连续随即游走模型构造的，用来描述混沌和湍流中的超扩散现象的方程。进一步考虑简单的情形 $\gamma=1,k=0$ ，利用 Gamma 函数和 Fox'H 函数的性质我们可以得到波动方程的 Gauchy 分布解：

$$G_0(t,x;1,1)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{D}t}{\pi^{\frac{n+1}{2}}(|x|^2+D^2t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \tag{2.1.48}$$

它与文 [86],[87] 中的结果相符。

值得指出的是，当 $0<\alpha<1$ 是方程 (2.1.38) 表示所谓的慢扩散，当 $1<\alpha<2$ 时被称作中间过程，这些方程都有十分明确的重要的物理意义。

§2.2 分数微分形式及其应用

微分形式

微分形式的微积分是纯数学的一个很讲究的分支，是应用数学的一个强有力的工具。关于强调应用方面的领域， Flanders[88] 给出了简明的介绍。下面给出微分形式的一个简短的回顾。向量空间在一点 $p\in E^n$ （ n 维欧几里德空间）能被构造出下面的表达类型：

一形式，

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i dx_i \tag{2.2.49}$$

二形式，

$$\beta=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}dx_i\wedge dx_j \tag{2.2.50}$$

“n” 形式，

$$\omega=w dx_1\wedge dx_2\cdots\wedge dx_n \tag{2.2.51}$$

其中 $\{x_i\}$ 是 E^n 的卡氏坐标。上面的和式是对满足条件

$$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i \tag{2.2.52}$$

的所有指标进行的。函数 a_i 和 b_{ij} 等仅依赖于 p ，并且依据不同的应用可以取实数值和复数值。如果一个 k 形式 γ 乘一个 m 形式 μ ，则下面是正确的：

$$\gamma\wedge\mu=(-1)^{km}\mu\wedge\gamma \tag{2.2.53}$$

如果 $k+m>n$, 结果是 0 。外积是分配、结合和反对称的。容易看出， k 形式的向量空间的维数是；

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{当 } k > n \text{ 时是 } 0.$$

通常的外导数的定义为

$$d = \sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.2.54}$$

外导数将 k 形式映入 $k+1$ 形式，且有下面的代数性质．让 γ 和 λ 是 k 形式， μ 是一 m 形式，那么

$$d(\gamma + \lambda) = d(\gamma) + d(\lambda) \tag{2.2.55}$$

$$d(\gamma \wedge \mu) = (d\gamma) \wedge \mu + (-1)^k \gamma \wedge d\mu \tag{2.2.56}$$

$$d(d\gamma) = 0 \tag{2.2.57}$$

最后一个恒等式被称为 Poincaré 引理. 形式 γ 称为闭的, 如果 $d\gamma = 0$. 形式 γ 称为恰当的, 如果存在形式 μ 满足 $d\mu = \gamma$, 其中 μ 的阶比 γ 的阶数小 1 . 恰当形式一定是闭的, 但闭形式不一定是恰当的. 有兴趣的读者可以参阅 Flanders[88] 或者 Lovelock 和 Rund[89] 得到更详细的叙述.

分数微分形式空间

如果在外导数的定义中导数允许取分数阶，那么就能定义一个分数外导数 [67]

$$d^v = \sum_{i=1}^{n} dx_i^v \frac{\partial^v}{(\partial(x_i - a_i))^v}, \tag{2.2.58}$$

注意下标 i 表示坐标数，上标 v 表示分数坐标微分的阶数， a_i 是导数的初始点 (在本文中考虑 $a_i = 0$ 的情形) .

有时候用标记 ∂_i^v 表示

$$\frac{\partial^v}{(\partial(x_i - a_i))^v}$$

在二维情形 (x, y) ，取初始点为原点，则 x^p 的 v 阶分数外导数为

$$d^v x^p = dx^v \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-v+1)} x^{p-v} + dy^v \frac{x^p}{y^v \Gamma(1-v)} \tag{2.2.59}$$

对导数参数的特殊值可以得到如下的结果：

$$v = 0, \quad d^0 x^p = 2x^p \tag{2.2.60}$$

$$v = 1, \quad d^1 x^p = dx^1 p x^{p-1} \tag{2.2.61}$$

$$v=2,\quad d^2x^p=dx^2p(p-1)x^{p-2} \tag{2.2.62}$$

和标准外微积分类似，用 dx_i^v 可以构造出向量空间．令 $F(v,m,n)$ 是一个在 $p\in E^n$ 的向量空间， v 表示基元素的分数微分阶数的和数， m 表示出现在基元素里的坐标微分的个数， n 表示坐标个数，并且 $\{x_i\}$ 是 $p\in E^n$ 的卡氏坐标．例如， $F(v,1,n)$ 的一个基序列是 $\{dx_1^v,dx_2^v,\ldots,dx_n^v\}$ 并且 $F(v,1,n)$ 的任意元素可表示为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i dx_i^v \tag{2.2.63}$$

对固定的 v , 这是一个 n 维向量空间．顺便指出，对每一个 v 的值存在一个不同的向量空间．当 $v=1$ 时，重新得到来自外微分的一形式．现在假设基元素由两个坐标微分构成，即 $f(v,2,n)$ ．在这种情况，基序列是很复杂的，

$$\left\{dx_i^{\mu_1}\wedge dx_j^{\mu_2}|i,j\in\{1,2,\ldots,n\},\forall\mu_1,\mu_2\geq 0,\mu_1+\mu_2=v\right\} \tag{2.2.64}$$

注意到 $dx_i^{\mu_1}\wedge dx_j^{\mu_2}$ 是 0 当且仅当 $\mu_1=\mu_2$ ，且 $i=j$ 等等．故， $F(v,2,n)$ 的任意一个元素可被表示成以下形式的和：

$$\beta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^v(\beta_{ij}(v_i,v-v_i)dx_i^{v_i}dx_j^{v-v_i})dv_i \tag{2.2.65}$$

其中 $\beta_{ij}(\mu,\mu)=0$ ．和前面向量空间 $F(v,1,n)$ 不同， $F(v,2,n)$ 对任意的 v 的值都是无穷维的，而且是不可数无穷维的．进一步，类似于标准的外微分的情形，我们可以构造空间：

$$F(\nu,m,n)=\{dx_{i_1}^{\mu_{i_1}1}\wedge dx_{i_2}^{\mu_{i_2}1}\cdots\wedge dx_{i_m}^{\mu_{i_m}1}\cdots|\sum_{k=1}^{n}\mu_{i_m j}=\nu\} \tag{2.2.66}$$

其中 $'\nu'$ 表示基元素的微分阶数且可以为任意阶； $'m'$ 表示坐标数．空间中的元素就叫做 ν- 形式．容易看出 $F(\nu,m,n)$ 是不可数无穷维空间当 $m\geq 2$ 时．令 $A\in F(\nu,m,n)$, $B\in F(\mu,k,n)$ ，则外积 A 和 B 具有反对称性质，即：

$$A\wedge B=(-1)^{km}B\wedge A\in F(\mu+\nu,k+m,n) \tag{2.2.67}$$

不同于标准外微分形式的外代数， $A\wedge B$ 不一定为零，当 $k+m>n$ 时， d^ν 把 $F(\mu,k,n)$ 中的元素映到 $F(\mu+\nu,k+1,n)$ 中．

为了研究 $F(\nu,m,n)$ 的代数性质，先来考虑它的有限维子空间：

$$G(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m,n)=\prod_{i=1}^{m}G(\nu_i,n) \tag{2.2.68}$$

其中 $G(\nu_i,n)=F(\nu_i,1,n)$ 且 $dimG(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m,n)=n^m$. 则

$$F(\nu,m,n)=\bigcup_{\sum_{i=1}^{m}\nu_i=\nu} G(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m,n)$$

接下来, 在我们比较熟悉的有限维空间 $G(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m,n)$ 中, 我们可以构造内积, Hodge 积而且所谓的分数 Poincaré 引理也成立:

$$d^\nu d^\nu(\alpha)=0,\forall\alpha\in F(\nu,m,n),\quad \forall\nu\in R. \tag{2.2.69}$$

更详细的内容可以参见 [68] .

我们知道梯度, 旋度和散度是向量分析中的基本求导算子, 当引入了外微分后它们的形式可以得到统一. 近来, 它们也被推广到了分数导数的形式 [90, 91] , 而且它们被应用在解决物理问题当中, 有一定的物理解释. 基于以上的事实我们考虑用分数外导数来引入分数梯度, 旋度和散度.

设 $\mathrm{R}^3:(x_1,x_2,x_3)$ 是卡氏坐标.

1. 假设 f 是 R^3 中的光滑函数, 按照定义 (2.2.58) 我们可以得到:

$$d^\nu f=\frac{\partial^\nu f}{(\partial x_1)^\nu}dx_1^\nu+\frac{\partial^\nu f}{(\partial x_2)^\nu}dx_2^\nu+\frac{\partial^\nu f}{(\partial x_3)^\nu}dx_3^\nu, \tag{2.2.70}$$

则我们称 $(\frac{\partial^\nu f}{(\partial x_1)^\nu},\frac{\partial^\nu f}{(\partial x_2)^\nu},\frac{\partial^\nu f}{(\partial x_3)^\nu})$ 是 f 的分数梯度, 记作 $grad^\nu f$.

2. 设 $\omega^\nu=a_1dx_1^\nu+a_2dx_2^\nu+a_3dx_3^\nu\in G(\nu,3)$, $a_i(i=1,2,3)$ 是 R^3 上得光滑函数, 则利用 [67] 中的乘积法则 (18) , 我们可以得到:

$$d^\nu\omega^\nu=\sum_{i=1}^{3}d^\nu(a_idx_i^\nu)=\sum_{i,j=1}^{3}dx_j^\nu\wedge\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}[\frac{\partial^{\nu-k}}{(\partial x_j)^{\nu-k}}a_i](\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}dx_i^k), \tag{2.2.71}$$

注意到

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}(dx_i^\nu)=0,\forall k\geq 1$$

(2.2.71) 可以约化为:

$$\begin{aligned}d^\nu\omega^\nu&=\sum_{i,j=1}^{3}dx_j^\nu\wedge dx_i^\nu\frac{\partial^\nu}{(\partial x_j)^\nu}a_i=\sum_{j<i}dx_j^\nu\wedge dx_i^\nu[\frac{\partial^\nu}{(\partial x_j)^\nu}a_i-\frac{\partial^\nu}{(\partial x_i)^\nu}a_j]\\&=[\frac{\partial^\nu a_3}{(\partial x_2)^\nu}-\frac{\partial^\nu a_2}{(\partial x_3)^\nu}]dx_2^\nu\wedge dx_3^\nu+[\frac{\partial^\nu a_1}{(\partial x_3)^\nu}-\frac{\partial^\nu a_3}{(\partial x_1)^\nu}]dx_3^\nu\wedge dx_1^\nu\\&+[\frac{\partial^\nu a_2}{(\partial x_1)^\nu}-\frac{\partial^\nu a_1}{(\partial x_2)^\nu}]dx_1^\nu\wedge dx_2^\nu.\end{aligned} \tag{2.2.72}$$

我们称 $(\frac{\partial a_3^\nu}{(\partial x_2)^\nu}-\frac{\partial a_2^\nu}{(\partial x_3)^\nu},\frac{\partial a_1^\nu}{(\partial x_1)^\nu}-\frac{\partial a_3^\nu}{(\partial x_2)^\nu},\frac{\partial a_2^\nu}{(\partial x_2)^\nu}-\frac{\partial a_1^\nu}{(\partial x_1)^\nu})$ 是向量场 $X=(a_1,a_2,a_3)$ 的分数旋度, 记作 $curl^\nu X$ 。

3. 设 $\omega^\nu = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_3 \in G(v, v, 3)$ ，因为

$$d^\nu(a_1 dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu) = \sum_{j=1}^{3} dx_j^\nu \wedge \frac{\partial^\nu}{(\partial x_j)^\nu}(a_1 dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu)$$
$$= \sum_{j=1}^{3} dx_j^\nu \wedge \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} (\frac{\partial^{\nu-k}}{(\partial x_j)^{\nu-k}} a_1) \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}(dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu)$$

而且注意到：

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}(dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu) = 0, \quad \forall k \geq 1,$$

我们有：

$$d^\nu(a_1 dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu) = \sum_{j=1}^{3} dx_j^\nu \wedge (\frac{\partial^\nu}{(\partial x_j)^\nu} a_1)(dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu) = (\frac{\partial^\nu}{(\partial x_1)^\nu} a_1) dx_1^\nu \wedge dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu$$

因此有

$$d^\nu \omega = (\frac{\partial^\nu}{(\partial x_1)^\nu} a_1 + \frac{\partial^\nu}{(\partial x_2)^\nu} a_2 + \frac{\partial^\nu}{(\partial x_3)^\nu} a_3) dx_1^\nu \wedge dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu$$

同样地，我们称 $\frac{\partial^\nu a_1}{(\partial x_1)^\nu} + \frac{\partial^\nu a_2}{(\partial x_2)^\nu} + \frac{\partial^\nu a_3}{(\partial x_3)^\nu}$ 是 $X = (a_1, a_2, a_3)$ 向量场的散度，记作： $div^\nu X$

在情形 1 ， 2 ， 3 中，'ν' 可以使任意实数甚至是分数阶的．当 $\nu = 1$ 时，所谓的分数梯度，旋度和散度就可以约化成经典的向量场中标准的梯度，旋度和散度．此外，类似于 Poincaré 引理，由分数 Poincaré 引理也可以得到：

$$curl^\nu grad^\nu f = 0, \quad div^\nu curl^\nu X = 0, \tag{2.2.73}$$

当 $\nu = 1$ 时，又可以得到经典的结果：

$$curl(grad f) = 0, \quad div(curl X) = 0.$$

值得提出的是，我们提出的 $grad^\nu f, curl^\nu X,$ 和 $div^\nu X$ 与文 [90, 91] 中用其他试验和建模方法得到的结果一致．而且这些工具将进一步推动分数微积分的发展，而且可以更好的解释许多物理现象，例如分数布朗运动和随即游走．

第三章 “AC=BD”理论与 C-D 对的构造方法

自从张鸿庆教授[92]于二十世纪六十年代提出了“AC=BD”思想，并于 1978 年发表以来，他和他的学生们在这方面做了大量的工作，使得这一思想在电动力学、弹性力学、流体力学、量子力学、孤立子理论、物理学等方面得到了广泛的应用．这一思想是一个开放的体系，遵循“简易、变易、不易”的原则．近年来该思想推广到解决非线性问题中，张鸿庆教授又提出了 C-D 可积系统与 C-D 对的概念，形成了在微分方程（组）求解中的 C-D 可积理论，在孤立子理论及其应用方面有了很好的成绩．本章简要介绍张鸿庆教授提出的关于微分方程（组）求解的“AB=CD”理论及应用，C-D 对的构造方法．

§3.1 “AC=BD”理论及其应用

“AC=BD”理论的基本思想就是将复杂不易求解的方程（原方程）通过适当的变换转换为简单易于求解的方程（目标方程）．不失一般性，可形式地将原方程和目标方程分别表示为 $Au=0$ 和 $Dv=0$，则原方程的求解就变为寻找适当的变换 $u=Cv$，将原方程化为易于求解的目标方程 $Dv=0$．但是，在实践中往往需要求得算子 B（辅助算子），使其满足“AC=BD”，有时还需要求得算子 R（余算子），使得 $AC=BD+R$．其具体格式是：设 $Au=0$ 为待求解的原方程，$Dv=0$ 是易求解的目标方程，寻找变换 $u=Cv$ 使得 $Au=0\to Dv=0$，且 $CkerD=kerA$．对一般微分方程的求解，就转化为以下问题的解决：给定算子 A，构造算子 C 和 D，使得 $CkerD=kerA$，及如何构造变换 $u=Cv$，将待求解的方程 $Au=0$ 约化为目标方程 $Dv=0$．

定义 3.1.1: 设 X 是线性空间，A,B,C,D 是从 X 到 X 的算子，对任意 $v\in X$，

$$AC(v)=A(Cv),BD(v)=B(Dv)$$

如果对 $v\in X$，$ACv=BDv$，则称 $AC=BD$．

定义 3.1.2: 如果对于算子 A，存在算子 B,C,D，使得 $AC=BD$，$CKerD=KerA$，其中 $KerA=\{u\mid Au=0\}$，$KerD=\{v\mid Dv=0\}$，则称 $Au=0$ 是可积系统．若 $CKerD\neq KerA$，但 $CKerD\subset KerA$，则称 $Au=0$ 为部分可积系统．

定义 3.1.3: 算子 C 和 D 称为算子 A 的 $C-D$ 对，如果系统：

$$\begin{cases}C(v,u)=0,\\ D(v,u)=0.\end{cases}\tag{3.1.1}$$

其相容条件恰为 $Au=0$，其中 u 为参数，“恰”的意义为：如果系统（2.1）的另一个兼容条件为 $A^{*}u=0$，那么 $KerA^{*}\subset KerA$．若 $C(v,u)=0$ 可写为 $u=Cv$，$D(v,u)=0$ 可写

为 $Dv=0$，那么 A 有显式的 $C-D$ 对. 若 $CKerD\subset KerA$，则对 $Dv=0$ 的任意解 v，若 $u=Cv$，则 $Au=0$。若 $CKerD\supset KerA$，则对 $Au=0$ 的任意解 u，必有 $v\in KerD$，使得 $u=Cv$。如果 $CKerD\supset KerA$ 和 $CKerD\subset KerA$ 同时成立，即 $CKerD=KerA$，这时方程 $Au=0$ 的一般解为 $u=Cv$，其中 v 满足 $Dv=0$，也称在变换 $u=Cv$ 下，方程 $Au=0$ 与 $Dv=0$ 等价。

定义 3.1.4: 若方程组 $\begin{cases}C(v,u)=0,\\ D(v,u)=0.\end{cases}$ 的相容性条件为 $Au=0$，则称 $Au=0$ 是 $C-D$ 可积的，并且 $\begin{cases}C(v,u)=0,\\ D(v,u)=0.\end{cases}$ 为 $Au=0$ 的 $C-D$ 对.

定理 3.1.1: 设 X 是线性空间，A,B,C,D 是 X 到 X 的线性算子. 如果 $AC=BD$，$B(0)=0$，且 $C\,kerD\supset kerA$，则方程（组） $Au=0$ 的一般解为 $u=Cv$，其中 v 满足 $Dv=0$。

定理 3.1.2: 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 a_{ij} 是线性偏微分算子，B,C,D 是偏微分算子矩阵，且满足 $AC=BD$，$CKerD=KerA$，则非齐次方程 $Au=f$ 的一般解可表示为 $u=Cv+e$，$Dv=g$，其中 e,g 是方程 $Ae+Bg=f$ 的一组解.

推论 3.1.1：若 X 是线性空间且 $CKerD\supset KerA$，则 $Au=0$ 的解可以用 $u_n=Cv_n$ 逼近，其中 v_n 满足 $Dv_n=0$。

推论 3.1.2：设 X 是线性空间，A,B,C,D 是 X 到 X 的线性算子，$f\in X$，且 $AC=BD$，$C\,kerD\supset kerA$，则方程（组） $Au=f$ 的一般解为：$u=Cv+e$，$Dv=g$。其中 e,g 满足方程（组） $Ae+Bg=f$。

证明：如果存在从 X 到 X 的算子 M,N 和 E 使得 $AM+BN=E$，则 $e=M\phi$ 和 $g=N\phi$ 满足方程 $Ae+Bg=f$，其中满足方程 $E\phi=f$。

张鸿庆教授及其学生应用 “ AC=BD ” 理论在微分方程求解方面作了大量的工作，这一思想是开放性的，所以在很多方面得到了广泛的应用，如弹性力学、电动力学、流体力学、量子力学、孤立子理论、理论物理等. 目前，算子 A 和 D 可以有如下不同的表达形式：

A	$\longrightarrow$	D
任意微分方程组		具有对角形式的微分方程组
非线性微分方程		线性微分方程
变系数微分方程		常系数微分方程
高阶微分方程		低阶微分方程
高维方程		低维方程
微分方程		代数方程
任意的方程		具有特定性状的方程
不可分离变量微分方程		可分离变量微分方程
不会求解方程		会求解方程或具有重要性的方程

§3.2 C-D 可积系统及其构造方法

定义 3.2.1 设 $Au=0$ 为一个具有解析系数的微分方程系，如果它有形式幂级数解，则称它是形式可积的．如果这个级数收敛，则该解是古典解．

定义 3.2.2: 形式可积条件是指原方程组在有形式幂级数解和无形式幂级数解两种情况下可积条件的总称．

定义 3.2.3 若方程组 $\begin{cases} C(u,v)=0, \\ D(u,v)=0. \end{cases}$ 的相容性条件为 $Au=0$, 则称 $Au=0$ 是 C-D 可积的，并且 $\begin{cases} C(u,v)=0, \\ D(u,v)=0. \end{cases}$ 为 $Au=0$ 的 $C-D$ 对．

最近 Reid 提出了将一类微分方程约化为标准型，进而确定解空间的维数，最后给出了 Taylor 形式幂级数解的思想和算法 (详细内容请参看文 [93])．

对于一个含有 m 个自变量 $x=(x_1,...,x_m)$ 及 n 个因变量 $V^1(x),...,V^n(x)$, V^p 的导数表示为 $D_aV^p=\partial^{a_1+\cdots+a_m}V^p/\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_m^{a_m}$, 其中 $a=(a_1,...,a_m)\in N^m, N=\{0,1,2,...\}$, $ord(a)=a_1+a_2+\cdots+a_m\geq 0$ 叫做导数的阶．

首先定义一个序：我们说 $D_aV^p>D_bV^q$, 如果满足下面的条件：

(i) $ord(a)>ord(b)$;

(ii) $ord(a)=ord(b)$ 且 $p>q$;

(iii) $ord(a)=ord(b), p=q$, 且 $\alpha-\beta$ 的第一个非零分量为正．

在上述序下， Reid 标准型是这样定义的：它所包含的每个方程可表示成如下的形式

$$D_bV^p=f_{b}^{p}.(R)$$

其中等式左边为首导数，右边为关于 x 及 V^i 的导数的函数，且满足如下条件：

(1) 在每一个方程 (R) 中，右边 f_b^p 所包含的导数均低于其首导数 D_bV^p;

(2) 对于不同方程中出现的首导数是不同的；

(3) 首导数的任何导数均不出现在其它任何方程的函数中.

利用该标准型的思想， Reid 成功地将线性 PDEs 约化为标准型 [93].

定理 3.2.1: 设 X 为 n 维线性空间， A, C, D 为 $X \to X$ 上的线性算子，若 C-D 对 $\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases}$ 证明：定义一个序：设 $X = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in R, i = 1, ..., n\}, v = (v^1, ..., v^m), u = (u^1, u^2, ..., u^k)$

(1) 对不同的变量 u, v, 按 $v > u$ 排序；

(2) 对同一个变量 u 或 v, 不妨用 v 来定义，若满足下列条件：

(i) $ord(\alpha) > ord(\beta)$;

(ii) $ord(\alpha) = ord(\beta)$ 且 $i > j$;

(iii) $ord(\alpha) = ord(\beta), i = j$, 且 $\alpha - \beta$ 的第一个非零分量为正.

则 $D_\alpha v^i > D_\beta v^j$, 其中

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in N^n, \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in N^n, D_\alpha v^i = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} v^i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, ord(\alpha) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geq 0.$$

(A) 若 $Au = 0$ 无解，即不能用 Taylor 形式幂级数解来表示，我们知道 $Au = 0$ 为一矛盾方程组，又已知 $Au = 0$ 为 $\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases}$ 的形式相容条件的一部分，即 $Au = 0$ 为 $\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases}$ 的某一等价方程组的一部分，因此该等价方程组无解，进而知 $\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases}$ 无解. 所以 $CKerD = \Phi \supset KerA = \Phi$.

(B) 若 $Au = 0$ 有解

在前面所定义的序下，因为 C, D 为线性算子，根据 Reid 的标准型算法，我们可将 $\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases}$ 约化为一个等价的标准型方程组

$$\begin{cases} D_{a_i} v^i = f_i(u, v), & i = 1, 2, ..., s, \\ D_{b_j} v^j = g_j(u), & j = 1, 2, .., l. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_{a_i} v^i = f_i(u, v), & i = 1, 2, ..., s, \\ D_{b_j} v^j = g_j(u), & j = 1, 2, .., l. \end{cases}$$

(B1) 若 $Au=0$ 恰为与 $D_{b_j}u^j=g_j(u)$ 一样，则

$$\begin{cases}Cv=u\\Dv=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D_{a_i}v^i=f_i(u,v), & i=1,2,...,s,\\Au=0.\end{cases}$$

所以 $Au=0$ 的解可以用 Taylor 幂级数形式解表示，则对应的 v 也存在形式幂级数解，由上式知，对 $u\in KerA,\exists v$，使得 $\begin{cases}Cv=u\\Dv=0\end{cases}$ 即 $CKerD\supset KerA$. (B2) 若 $Au=0$ 形式上与 $D_{b_j}v^j=g_j(u)$ 不一样，因为 A 为线性算子，则根据前面的规定的序，总能将 $Au=0$ 约化为一个标准型， $D_{c_k}u^k=h_k(u)$，则 $Au=0\Leftrightarrow D_{c_k}u^k=h_k(u)$ 已知 $Au=0$ 为 $\begin{cases}Cv=u\\Dv=0\end{cases}$ 的形式相容性条件，因此 $D_{c_k}u^k=h_k(u)$ 也是 $\begin{cases}Cv=u\\Dv=0\end{cases}$ 的形式相容性条件中仅含 u 的部分.
又已知在同一序下 $\begin{cases}Cv=u\\Dv=0\end{cases}$ 等价于 $\begin{cases}D_{a_i}v^i=f_i(u,v), & i=1,2,...,s,\\D_{b_j}v^j=g_j(u), & j=1,2,..,l.\end{cases}$，即 $D_{b_j}v^j=g_j(u)$ 为 $\begin{cases}Cv=u\\Dv=0\end{cases}$ 的形式相容性条件中仅含 u 的可积条件. 根据 Reid 的算法思想，对同一方程组在同一序下得到的相容性条件应是唯一的. 因此 $D_{c_k}u^k=h_k(u)\Leftrightarrow D_{b_j}v^j=g_j(u)$，进而有 $Au=0\Leftrightarrow D_{b_j}v^j=g_j(u)$. 这又归结为情况 (B1)，所以有即 $CKerD\supset KerA$. 定理得证. 对于任意给定的一个微分代数方程组 $DPS=0$，如果不是显然矛盾的，从偏微分方程的理论来说，很难判定它是否有解，从微分代数的角度出发，可以通过 Rosenfeld 引理，判定它所对应的代数方程组是否有解，而判定代数方程组是否有解，我们可以用 Grobner 基的方法，一个代数方程组无解当且仅当它的 Grobner 基为 1 .

设 $R=K\{u_1,u_2,\cdots,u_t,v_1,v_2,\cdots,v_r\}$ 是一个带有 m 个微分算子的微分环，$Au,Cv,Dv\subset R$，

规定： Au 是指：在它的每一个微分多项式中，只出现 $u_1,u_2,\cdots,u_t$ 和它的有限阶导数.

Dv 是指：在它的每一个微分多项式中，只出现 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 和它的有限阶导数. $u=Cv$ 是指一个变换 $u_i=C_iv,i=1,2,\cdots,t$.

设 $Au=0$ 是我们所要求解的方程组，经过变换 $u=Cv$，得到目标方程组 $Dv=0$. 如果 $Dv=0$ 有解，一般地有 $Cd-zero(Dv)\subseteq d-zero(Au)$. 若无解，则说明 $Au=0$ 没有 $u=Cv$ 类型的解. 下面的定理给出了二者相等的充要条件.

定理 3.2.2: 设 $Au=0,u=Cv,Dv=0$，则系统 $Dv,Cv-u$ 的只含有 u 的可积条件恰为 Au 的特征集当且仅当 $d-zero(Au)=Cd-zero(Dv)$. 这里恰为 Au 的特征集是指， Au 的

特征集与系统 Dv，$Cv-u$ 的特征集中只含 u 的部分，或者相同，或者可以互相约化为 0。这里的序为，在前面规定的序的基础上，再规定 $u_1 < u2 < \cdots < u_t < v_1 < v_2 < \cdots < v_r$。

证明：由 Rosenfeld-Grobner 算法，首先判定 $Au=0$，$u=Cv$，$Dv=0$ 是否有解，若无解，则说明 $Au=0$ 没有 $u=Cv$ 类型的解。下面假设其有解。

（ $\Leftarrow$ ）反证．设 Au 的特征集为 DCS．假设 Dv，$Cv-u$ 还有其它只含有 u 的可积条件，记为 Pu，且不能被 DCS 约化为 0，设 $Pu \equiv P_1u \quad mod[DCS]$．此时，系统 Dv，$Cv-u$ 的特征集中只含有 u 的可积条件正好是 DCS，P_1u 的特征集，记为 DCS_1．由假设可知，$d-zero(DCS_1) \subset d-zero(DCS)$，且是真包含，否则 P_1u 就会被 DCS 约化为 0．这说明使得 $Dv=0$，$Cv=u$ 有解的 u 的集合为 $d-zero(DCS_1)$．而 $d-zero(DCS)=d-zero(Au)$，矛盾．

($\Rightarrow$) 由 Rosenfeld-Grobner 算法，可知 $Au=0$，$u=Cv$，$Dv=0$ 有解．设它的特征集为 DCS，而 $d-zero(Au,u-Cv,Dv)=d-zero(DCS)$，由已知条件系统 Dv，$Cv-u$ 的只含有 u 的可积条件为恰为 Au 的特征集，可知，使得 $Dv=0$，$Cv-u=0$ 有解的 u 的集合恰为 $d-zero(Au)$．即 $\forall u \in d-zero(Au), \exists v \in d-zero(Dv)$，且满足 $u=Cv$，即同理可证反包含关系成立．定理得证．

对于线性变系数的情形，如果我们考虑其正则解的情形，也就是说，限制在某个代数流形上，其结果和上面的结果类似。

对于非线性的情形，如果我们在局部意义下考虑其正则解的情况，我们有以下结论．

定理 3.2.3: 设 $Au=0, u=Cv, Dv=0$，如果系统 Dv，$Cv-u$ 的只含有 u 的可积条件能被 Au 的特征集约化为 0，则 $d-zero(Au/J_1) \subseteq Cd-zero(Dv/J_2)$．其中 J_1, J_2 分别为 Au 的特征集和 $Dv, Cv-u$ 的特征集（只含 v 的部分）的 IS- 幂积 (证明从略)．

一般情形下，在非线性偏微分方程精确求解的过程中，构造其 $C-D$ 对的方法大致有两种：一是直接法，即直接从方程本身出发，直接构造满足需要的 $C-D$ 对；二是假设法，即基于一定的需要，对 $C-D$ 对的构造提出一定的假设，在假设的基础上构造需要的 $C-D$ 对．这种方法目前很多，例如精确求解中的 Lax 对、 Darboux 变换、 Backlund 变换、 Painleve 检验、齐次平衡法、相似约化等等．运用这一思想，解决了一类非线性系统的求解问题，使其在弹性力学、电动力学、流体力学、量子力学和孤立子理论中得到了广泛的应用．尤其是在非线性系统的求解中，运用数学机械化的方法，使得部分 $C-D$ 对的构造得以机械化的实现，大大节约了人的脑力劳动，丰富和发展了“ $AC=BD$ ”的内容．

§3.3 一种构造的 Darboux 变换及其应用

Backlund **变换和** Darboux **变换**

1885 年，瑞典几何学家 Backlund 在研究复常数曲面时，得到了 Sine-Gordon 方程的有趣的性质。

设 u 和 u' 是 Sine-Gordon 方程 $u_{\xi\eta}=\sin u$ 的两个解，它们之间有如下的关系：

$$u'_\xi = u_\xi - 2\beta\sin(\frac{u+u'}{2}), u'_\eta = -u_\eta + \frac{2}{\beta}\sin(\frac{u-u'}{2}). \tag{3.3.1}$$

这就是 Sine-Gordon 方程的 Backlund 变换. 该变换给出了从 Sine-Gordon 方程的一个解得到另一个解的方法 [94]，另外得到了一个非线性叠加公式：

$$u_{12} = 4\arctan[\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\tan(\frac{u_1-u_2}{4})] + u_0. \tag{3.3.2}$$

在今天看来，这个公式在非线性理论中具有重要作用，但在当时，由于没有得到广泛的应用，而被冷落了近百年. 在直到 20 世纪 60 年代，由于非线性光学，晶体位错等许多领域的研究都与 Sine-Gordon 方程有关. 这时 Backlund 变换重新引起了人们的注意，并成为制作多个孤立子的重要手段，尤其令人瞩目的是， Backlund 变换的存在，可换性定理和非线性叠加公式等事项不是 Sine-Gordon 方程所专有的． 1973 年， Wahlquist 和 Estabrook 发现 KdV 方程 [95]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.3.3}$$

也具有 Backlund 变换，令 $w=\int_{-\infty}^{x} u dx$, 它满足

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0. \tag{3.3.4}$$

作方程组

$$\begin{aligned} w'_x &= \beta - w_x - \tfrac{1}{2}(w-w')^2, \\ w'_t &= -w_t + (w-w')(w_{xx}-w'_{xx}) - 2(w_x^2 + w_x w'_x + w'^2_x) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

容易验证，当 u 满足 KdV 方程时，方程 (3.3.5) 完全可积，其解 w' 的导数 $u'=w'_x$ 也是 (3.3.3) 的解. 不仅如此，对 KdV 方程也有类似的可换性定理，其非线性叠加公式为：

$$w_{12} = w_0 + 2\frac{\beta_1-\beta_2}{w_1-w_2}. \tag{3.3.6}$$

1976 年 Wahlquist 和 Estabook[95] 提出了非线性方程的 Backlund 变换的延拓性，把 Backlund 变换，守恒律，反散射变换统一在一个新概念中 - 拟位势中. 1983 年，Weiss 、Tabor 和 Carnval 推广了常微分方程的 Painleve 可积的判定方法，提出了偏微分方程的 Painleve 可积的判定方法，并用其来获得可积方程的 Backlund 变换，以及 Darboux 变换. 在一百多年前达布 (J. G. Darboux) 就发现，薛定谔方程

$$\phi_{xx} + u\phi = \lambda\phi, \tag{3.3.7}$$

在达布变换

$$\bar{\phi} = \phi_x + \sigma\phi, \bar{u} = u - 2\sigma_x = u + 2[lnf(x\lambda_1)]_{xx}, \tag{3.3.8}$$

$$\sigma = -\frac{f_x(x,\lambda_1)}{f(x,\lambda_1)}, f_{xx} + uf = \lambda_1 f \tag{3.3.9}$$

下是不变的. 即 $\bar{\phi}$ 满足与 (3.3.7) 形式相同的方程

$$\bar{\phi}_{xx} + (\bar{u})\bar{\phi} = \lambda(\bar{\phi}). \tag{3.3.10}$$

Darboux 变换的基本思想为：利用非线性方程的一个解及其 Lax 对的解，用代数算法及微分运算来获得非线性方程的新解和 Lax 对相应的解. 有时人们将 Darboux 变换也称为 Backlund 变换，或者称为求 Backlund 变换的 Darboux 方法. 关于 Backlund 变换的早期工作可参考文献 [96, 97, 98]. 1975 年， Wadati 等人将 Darboux 变换推广到 mKdV 和 Sine-Gordon 方程 [99]. 1986 年，中科院院士谷超豪等人将 Darboux 变换推广到 KdV 族，ANKS 族及 (1+2)- 维，高维方程组，并且将 Darboux 变换应用到微分几何中的曲面论和调和映照中. 另外，延拓法及局部高阶切丛法等也能获得 Backlund 变换 [98, 100, 101]. 互换性定理和非线性叠加公式则给出了解之间的代数运算，可由已知解求得新解. 但实际上越往下计算越复杂，这就限制了 Backlund 变换的应用，而不变定理和非线性叠加公式 [69, 95] 则给了解之间的代数运算可由已知解得到新解. 胡星标教授在这方面作了深入的研究工作 [102]..[106]．目前， Backlund 变换已成为研究非线性方程的有力工具. 特别，关于有限维可积系统的 Backlund 变换又引起了人们的广泛重视，我国数学家曾云波教授作了许多的研究工作 [107]．

王明亮教授和李志斌教授提出了求 Backlund 变换的有效而简便的方法. 范恩贵教授发展了这一工作，闫振亚博士、陈勇教授、李彪博士等也作了许多工作 (参见陈勇教授的论文 [20])．

最近，楼和胡 [108] 通过对 Kadomtsev-Petviashvili 方程进行对称约束得到了 (1+1)- 维， (2+1)- 维和 (3+1)- 维的可积的孤立子方程，其中 (2+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统是：

$$\begin{aligned} &H_{yt} + 4(H_{xx} + H^3 - 3HH_x + 3HW)_{xy} + 12(HG)_{xx} = 0, \\ &G_t + 4(G_{xx} + 3H^2G + 3HG_x + 3GW)_x = 0, \\ &G_x - W_y = 0, \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

(1+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统是：

$$\begin{aligned} &H_t + 4(H_{xx} + H^3 - 3HH_x + 6HG)_x = 0, \\ &G_t + 4(G_{xx} + 3H^2G + 3HG_x + 3G^2)_x = 0. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

当 $x = y$, 方程 (3.3.11)) 可以约化为 (3.3.12)．我们知道许多学者已经研究了 (2+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统的 Painlevé 性质，一致局部结构和精确解等各方面. 并且,

(1+1)- 维 HBK 系统也吸引了越来越多数学工作者的注意力．它在其他学科有很多重要的应用．近来，范和黄等 [109, 110] 利用不同的 Darboux 变换得到 (1+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统的精确解．因为 Darboux 变换是求解偏微分方程的最有效的方法之一．因此我们也试图利用相应谱问题规范变换，构造一些新的 Darboux 变换来求解 (1+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统，通过严格的代数算法获得具有一定物理意义的显性解．

上述 (1+1)- 维高阶 Broer-Kaup(HBK) 系统的 Lax 对可以由其相应的谱问题 (λ 是谱参数)：

$$\phi_x = M\phi, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2)^T, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - H) & -G \\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda - H) \end{pmatrix}, \tag{3.3.13}$$

和辅助谱问题

$$\phi_t = N\phi, \quad N = 4\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & -N_{11} \end{pmatrix}, \tag{3.3.14}$$

来构造，其中

$$\begin{aligned} N_{11} &= -\tfrac{1}{2}\lambda^3 - G\lambda + \tfrac{1}{2}(H_{xx} - 2G_x + H^3 + 2HG - 3HH_x), \\ N_{12} &= G\lambda^2 + (G_x + HG)\lambda + [(G_x + HG)_x + H(G_x + HG) + 2G^2], \\ N_{21} &= -\lambda^2 - H\lambda + (H_x - 2G - H^2), \end{aligned}$$

很显然， Lax 对 (3.3.13),(3.3.14) 可以通过作规范变换

$$\tilde{\phi} = T\phi. \tag{3.3.15}$$

转化为：

$$\tilde{\phi}_x = \tilde{M}\tilde{\phi}, \quad \tilde{M} = (T_x + TM)T^{-1}, \tag{3.3.16}$$

和

$$\tilde{\phi}_t = \tilde{N}\tilde{\phi}, \quad \tilde{N} = (T_t + TN)T^{-1}, \tag{3.3.17}$$

由相容条件 $\tilde{\phi}_{xt} = \tilde{\phi}_{tx}$ 可以产生：

$$\tilde{M}_t - \tilde{N}_x + [\tilde{M}, \tilde{N}] = T(M_t - N_x + [M, N])T^{-1}, \tag{3.3.18}$$

它可以告诉我们要使 HBK 系统 (3.3.13) 在规范变换下解不变，最重要的就是寻找与 M, N 有相同形式的矩阵 $\tilde{M}, \tilde{N}$ ．相应地， M, N 中的旧函数 H 和 G 也映射成了 $\tilde{M}$,$\tilde{N}$ 中的 $\tilde{H}$ 和 $\tilde{G}$ ．

我们构造了如下 Darboux 变换：

$$T = T(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda + a) & \alpha b \\ \delta c & \delta(\lambda + d) \end{pmatrix} \tag{3.3.19}$$

其中 $\alpha=(c+1)^{1/2}$ 和 $\delta=(c+1)^{-1/2}(c\neq -1)$. 而且 a,b,c,d 是由如下的代数系统决定：

$$\begin{aligned}
&\alpha(\lambda_1+a)\phi_1+\alpha b\phi_2=0,\\
&\alpha(\lambda_2+a)\psi_1+\alpha b\psi_2=0,\\
&\delta c\phi_1+\delta(\lambda_1+d)\phi_2=0,\\
&\delta c\psi_1+\delta(\lambda_2+d)\psi_2=0,
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

其中 $\phi=(\phi_1,\phi_2)^T,\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$ 是分别关于谱参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2$ 的谱问题 (3.3.13),(3.3.13) 的两个基本解.

通过直接计算我们容易得到：

$$a=\frac{\lambda_2\phi_2\psi_1-\lambda_1\phi_1\psi_2}{\Delta}, \tag{3.3.21}$$

$$b=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\phi_1\psi_1}{\Delta}, \tag{3.3.22}$$

$$c=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\phi_2\psi_2}{\Delta}, \tag{3.3.23}$$

$$d=\frac{\lambda_1\phi_2\psi_1-\lambda_2\phi_1\psi_2}{\Delta}, \tag{3.3.24}$$

$$\Delta=\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1. \tag{3.3.25}$$

表达式 (3.3.19) 说明 $T(\lambda)$ 是关于参数 λ 的二次多项式，且

$$detT(\lambda)=(\lambda+a)(\lambda+d)-bc. \tag{3.3.26}$$

把 a,b,c,d 代入 $detT(\lambda)$ ，我们可以得到： $detT(\lambda_i)=0(i=1,2)$.

注意到 $detT(\lambda)$ 的首系数为 1, $detT(\lambda)$ 又可以改写为：

$$detT(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2). \tag{3.3.27}$$

从上述事实我们可以得到以下的命题：

命题 1. 在 (3.3.16) 中的矩阵 $\tilde{M}=(T_x+TM)T^{-1}$ 和矩阵有相同的形式，即：

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda-\tilde{H}) & -\tilde{G} \\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda-\tilde{H}) \end{pmatrix} \tag{3.3.28}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}=H-\tfrac{c_x}{c+1},\\
&\tilde{G}=(c+1)(b+G).
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

变换 (3.3.15) 和 (3.3.19):$(\phi,H,G)\longrightarrow(\tilde{\phi},\tilde{H},\tilde{G})$ 就是谱问题 (3.3.13) 的 Dauboux 变换.

证明： 令 $T^{-1}=T^*/detT$, 和

$$(T_x+TM)T^*=\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中 T^* 表示矩阵 T 的伴随矩阵. 容易知道 $f_{11}(\lambda)$ 和 $f_{22}(\lambda)$ 是关于参数 λ 的 3 次多项式, $f_{12}(\lambda)$ 和 $f_{21}(\lambda)$ 是关于参数 λ 的 2 次多项式. 我们容易证明 λ_1,λ_2 是 $f_{ij}(\lambda)(i,j=1,2)$ 根, 因此 $deT(\lambda) \mid f_{ij}(\lambda)(i,j=1,2)$.

基于以上的事实, 我们可以假设:

$$(T_x + TM)T^* = detTP(\lambda), \tag{3.3.30}$$

其中

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)}\lambda + P_{11}^{(0)} & p_{12}^{(0)} \\ p_{21}^{(0)} & p_{22}^{(1)}\lambda + p_{22}^{(0)} \end{pmatrix},$$

且 $p_{ij}^{(k)}(i,j=1,2;k=0,1)$ 是与 λ 无关的待定函数, 则方程 (3.3.30) 可以改写成:

$$(T_x + TM)T = P(\lambda)T. \tag{3.3.31}$$

比较方程两边 λ^2,λ 项的系数, 可以得到:

$$\begin{aligned}
p_{11}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}, p_{22}^{(1)} = -\tfrac{1}{2},\\
p_{11}^{(0)} &= -ap_{11}^{(1)} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{H}{2} - \tfrac{\alpha_x}{\alpha} = -\tfrac{1}{2}\tilde{H},\\
p_{22}^{(0)} &= -\tfrac{\alpha b}{\delta}p_{22}^{(1)} - \tfrac{d}{2} + \tfrac{H}{2} + \tfrac{\delta_x}{\delta} = \tfrac{1}{2}\tilde{H}\\
p_{12}^{(0)} &= -\tfrac{\alpha b}{\delta}p_{11}^{(1)} - \tfrac{\alpha G}{\delta} - \tfrac{\alpha b}{2\delta} = -\tilde{G}\\
p_{21}^{(0)} &= -\tfrac{\delta c}{\alpha}p_{22}^{(1)} + \tfrac{\delta c}{2\alpha} + \tfrac{\delta}{\alpha} = 1.
\end{aligned}$$

从式 (3.3.16) , (3.3.31) 可以看出: $\tilde{M} = P(\lambda)$.

命题 2. 在 Darboux 变换 (3.3.15) , (3.3.19) 下, 如果 a,b,c,d 满足方程组 (3.3.21)-(3.3.25) , 则

$$b_x = Ga - \frac{\tilde{G}}{c+1}d - Hb \tag{3.3.32}$$

$$c_x = (c+1)a + Hc - d \tag{3.3.33}$$

$$c_t = 8(c+1)[(\bar{h} - h) + (G - \tilde{G})a + \frac{c}{c+1}(\tilde{G}_x + \tilde{H}\tilde{G}) + Hb] \tag{3.3.34}$$

成立. 其中:

$$\begin{aligned}
h &= \tfrac{1}{2}(H_{xx} - 2G_x + H^3 + 2HG - 3HH_x),\\
\tilde{h} &= \tfrac{1}{2}(\bar{H}_{xx} - 2\tilde{G}_x + \tilde{H}^3 + 2\tilde{H}\tilde{G} - 3\tilde{H}\tilde{H}_x).
\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

证明: 从关系式:

$$\begin{aligned}
\phi_{1x} &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - H)\phi_1 - G\phi_2,\\
\phi_{2x} &= \phi_1 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - H)\phi_2,\\
\psi_{1x} &= \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - H)\psi_1 - G\psi_2,\\
\psi_{2x} &= \psi_1 - \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - H)\psi_2.
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

容易计算出：

$$\begin{aligned}
&(\phi_1\psi_1)_x = \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\phi_1\psi_1 - H\phi_2\psi_2 - G(\phi_2\psi_1+\phi_1\psi_2),\\
&(\phi_2\psi_2)_x = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\phi_2\psi_2 + H\phi_2\psi_2 + (\phi_2\psi_1+\phi_1\psi_2),\\
&(\phi_1\psi_2)_x = \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\phi_1\psi_2 - G\phi_2\psi_2 + \phi_1\psi_1,\\
&(\phi_2\psi_1)_x = \tfrac{1}{2}(-\lambda_1+\lambda_2)\phi_2\psi_1 - G\phi_2\psi_2 + \phi_1\psi_1,\\
&\Delta = (\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1)_x = \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1).
\end{aligned} \tag{3.3.37}$$

利用方程组 (3.3.21)-(3.3.25)，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
b_x &= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta}[\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\phi_1\psi_1 - H\phi_1\psi_1 - G(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1)]\\
&-\frac{1}{\Delta^2}(\lambda_1-\lambda_2)\phi_1\psi_1\cdot\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1)\\
&= G[\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta}(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1)] - H[\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta}\phi_1\psi_1] - \frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta^2}(\lambda_1\phi_1\phi_2\psi_1^2 - \lambda_2\phi_1^2\psi_1\psi_2)\\
&= G[\frac{\lambda_2\phi_2\psi_1-\lambda_1\phi_1\psi_2}{\Delta} - \frac{\lambda_1\phi_2\psi_1-\lambda_2\phi_1\psi_2}{\Delta}] - H[\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta}\phi_1\psi_1]\\
&-\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta^2}\phi_1\psi_1(\lambda_1\phi_2\psi_1-\lambda_2\phi_1\psi_2)\\
&= Ga - \frac{\tilde{G}}{c+1}d - Hc
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

用同样的方法和技巧，我们可以证明 $c_t=(c+1)a+Hc-d$ 。此外，我们可以计算出在辅助的谱问题中的 $(\phi_1\psi_1)_t,(\phi_2\psi_2)_t,(\phi_1\psi_2)_t,(\phi_2\psi_1)_t$ 。然而，由于矩阵 N 的复杂性，这个过程将十分复杂. 利用计算机符号计算软件 Maple，我们可以证明 (3.3.34) 从而完成命题证明.

命题 3. 在 DT 变换 (3.3.15),(3.3.19) 下， (3.3.17) 中的矩阵 $\tilde{N}$ 与矩阵 N 有相同的形式，即：

$$\tilde{N} = 4\begin{pmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22}, \end{pmatrix} \tag{3.3.39}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}_{11} = -\tfrac{1}{2}\lambda^3 - \tilde{G}\lambda + \tfrac{1}{2}(\tilde{H}_{xx} - 2\tilde{G}_x + \tilde{H}^3 + 2\tilde{H}\tilde{G} - 3\tilde{H}\tilde{H}_x),\\
&\tilde{N}_{12} = \tilde{G}\lambda^2 + (\tilde{G}_x + \tilde{H}\tilde{G})\lambda + [(\tilde{G}_x+\tilde{H}\tilde{G})_x + \tilde{H}(\tilde{G}_x+\tilde{H}\tilde{G}) + 2\tilde{G}^2],\\
&\tilde{N}_{21} = -\lambda^2 - \tilde{H}\lambda + (\tilde{H}_x - 2\tilde{G} - \tilde{H}^2),
\end{aligned}$$

同时原函数 H 和 G 将映射为 $\tilde{H}$ 和 $\tilde{G}$(用命题 1 中的所用的方法，我们可以证明该命题) .

Darboux 变换的应用

接下来，我们将应用 DT 变换构造 HBK 系统 (3.3.12) 的显性解，它们具有一定的物理意义. 为了简单起见，我们令 $H=0, G=1$ ，选择三个基本解：

$$\phi_1 = cosh[\xi_1(x,t)], \quad \phi_2 = \alpha_1 sinh[\xi_1(x,t)] + \tfrac{1}{2}\lambda_1 cosh[\xi_1(x,t)],$$

$$\psi_1 = sinh[\xi_2(x,t)], \quad \psi_2 = \alpha_2 cosh[\xi_2(x,t)] + \tfrac{1}{2}\lambda_2 sinh[\xi_2(x,t)],$$

$$\phi_3 = cosh[\xi_3(x,t)], \quad \phi_4 = \alpha_3 sinh[\xi_3(x,t)] + \tfrac{1}{2}\lambda_3 cosh[\xi_3(x,t)],$$

其中 $\alpha_i = -\frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \xi_i(x,t) = -\alpha_i(x + \beta_i t)(\beta_i = -4(\lambda_i^2 + 2), (i = 1,2,3))$, 即 $\tilde{H} = H - \frac{cx}{c+1}$ 和 $\tilde{G} = (c+1)(b+G)$ 。

分析可知：如果 $\lambda_2 > \lambda_1 > 1, a, b, c, d$ 及 Δ 由式 (3.3.21)-(3.3.25) 决定，则 $[\tilde{H}(x,t), \tilde{G}(x,t)]$ 是两个追赶碰撞孤立波；而且，如果 $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < -1, a, b, c, d$ ， $\Delta = \phi_1\phi_4 - \phi_2\phi_3$ 。得到的新的解 $[\tilde{H}, \tilde{G}]$ 是两个迎面碰撞孤立波.

结 论

力学、物理、化学、生物、金融学领域所引出的分数微分方程和非线性发展方程具有明确的实际意义，而求解这些方程往往是比较困难的．试图解决其中的一些问题，本文得到了如下的结果和一些仍有待解决的想法：

一、构造了一种新的 Mittag-Leffler 函数，并且研究了它的重要的积分变换，包括 Laplace 变换， Mellin 和逆 Fourier 变换，为求解带有分数时间和空间导数的分数扩散 - 波动方程提供了较有效的工具．

二、利用分数微分形式推广了向量分析中的基本工具 — 梯度，旋度和散度到所谓的分数梯度，旋度和散度．

三、以机械化的方法为指导构造了一种 Darboux 变换，将一类微分方程转化为代数方程来求解，并得到了一些有意义的新解．

近来出现了越来越多的分数发展方程模型 (主要是线性的)，我们考虑是否可以将比较成熟的非线性发展方程的理论应用于发展不够成熟的分数微分方程的理论？分数 Maxwell 方程以及一些相关方程的出现让我们思考，既然外微分形式可以改写电磁学的经典方程组，分数微分形式是否可以改写这些新出现的具有物理意义的分数微分方程？这些分数微分算子在什么样的条件下可以代数化，机械化？.... 因此，我们的研究还有较大的空间．

参考文献

[1] 林东岱，李文林，虞言林，数学与数学机械化，山东教育出版社， 2001.

[2] 高小山，数学机械化进展综述，数学进展， 2001, 30(5): 385.

[3] J. F. Ritt, Bull. Amer. Math. Soc., 1934, 40: 303.

[4] J. F. Ritt, Differential Algebra, New York:American mathematical Society, 1950.

[5] X. S. Gao, J. Z. Zhang, and S.C. Chou, Geometry Expert (in Chinese), Nine Chapters Pub., Taiwan, 1998.

[6] X. S. Gao , An Introduction to Wu's Method of Mechanical Geometry Theorem Proving, IFIP Transaction on , Automated Reasoning, North-Holland, 1993, 13–21.

[7] J. Z. Wu and Z. J. Liu, Proceedings of 1st Asian Symposium on Computer Mathematics, Beijing of China, 1995.

[8] J. Z. Wu and Z. J. Liu, Science in China(Series E), 1996, 39(6): 608.

[9] H. Shi, Proceeding 1992, International work Math. Mech., International Academic, 1992:79. MM-Preprints, 1997: 1-11.

[10] H. Shi, Proceeding 1992, International work Math. Mech., International Academic, 1992:79. MM-Preprints, 1997: 1-11.

[11] 石赫，机械化数学引论，湖南教育出版社， 1998 .

[12] X. D. Sun, K. Wang, K. Wu, Commun. Theor. Phys. 1996, 26: 213.

[13] X. D. Sun, K. Wang, K. Wu, Classification of six-vertex-type solutions of the colored Yang ＋ Baxter equation. J. Math. Phys. 1995, 10: 6043. Solutions of Yang-Baxter equation with color parameters. 中国科学 A; 1995, 38: 1105.

[14] Wang M.L. and Li Z.B., Proc. Of the 1994 Beijing Symposium on nonlinear evolution equations and infinite dimensional dynamics systems, Zhongshan University Press, 1995,181-185.

[15] 李志斌，张善卿，非线性波方程准确孤立波解的符号计算，数学物理学报， 1997, 17(1): 81-89.

[16] Z. B. Li, MM-Preprints, 1997, 15: 64.
Z. B. Li and H. Shi, Appl. Math-JCU, 1996, 11B: 1.
Z. B. Li, Proc. Of Asian symposium on Computer Mathematics, Lanzhou University, 1998: 153.

[17] 朱思铭，施齐焉，现代数学和力学 (MMM-VII), 上海大学出版社， 1997: 482.

[18] 范恩贵，大连理工大学博士论文， 1998.

[19] 闫振亚，大连理工大学博士论文， 2002.

[20] 陈勇，大连理工大学博士论文， 2003.

[21] 郑学东，大连理工大学硕士论文， 2003.

[22] Erich Kaltofen, Challenges of Symbolic Computation: My Favorite Open Problems. J. Symbolic Computation, 2000, 29: 891-919.

[23] B. Buchberger, G. E. Collins and R. Loos, Computer Algebra — Symbolic and Algebraic Computation, Beijing: World Publishing Corporation, 1988.

[24] R. H. Risch, Trans. Am. Math. Soc., 1969, 139: 167.

[25] E. R. Berlekamp, Factoring polynomials over large finite fields, Math. Comput., 1970, 24: 713.

[26] W. S. Brown, On the partition function of a finite set, J. ACM, 1971, 18: 478.

[27] Gosper, R. W., Decision Procedures for Indefinite Hypergeometric Summation, Proc. Nat. Acad.

Sci. USA, 1978, 75: 40-42.

[28] A. K. Lenstra, Factoring multivariate polynomials over algebraic number fields, SIAM J. Comput., 1987, 16: 591.

[29] A. K. Lenstra, H. W. Jr. Lenstra and L. Lovasz, Factoring polynomials with rational coefficients, Math. Ann., 1982, 261: 515.

[30] E. Kaltofen and B. Trager, Computing with polynomials given by black boxes for their evaluations: greatest common divisors, factorization, separation of numerators and denominators, J. Symb. Comput., 1990, 9: 310.

[31] V. Shoup, A new polynomial factorization algorithm and its implementation, J. Symb. Comput., 1995, 20: 363.

[32] Ross B ed. The Fractional Calculus and Its Application. Lecture Notes in Mathematics(457). Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[33] Oldham K B and Spanier J. The Fractional Calculus. New York:

[34] Keith B. Oldham, Jerome Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York and London, 1974.

[35] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982

[36] 高安秀树．分数维．北京：地震出版社， 1989

[37] 王东生、曹磊．混沌、分形以及应用．合肥，中国科学技术出版社， 1995

[38] Carpinteri A and Mainardi F. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1997

[39] Nigmatullin R R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. Phys Slat Sol (B), 1986, 133, 425-430

[40] Rocco A and West B J. Fractional calculus and the evolution of fractal phenomena. Physica A, 1999, 265(3), 535-546

[41] Ren F Y, Liang J R and Wang X T. The determination of the diffusion kernel on fractals and fractional diffusion equation for transport phenomena in random media. Physics Letters A, 1999, 252(3), 141-150

[42] Kolwankar K M. Fractas and differential equations of fractional order. J indian Inst Sci. 1998. 78(4). 275-291

[43] Nonnenmacher T F and Metzler R. On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications. Fractals, 1995, 3(3), 557-566

[44] Friendvich C. Relaxation function of rheological constitutive equations with fractional derivatives: Thermodynamical constraints. In: Rheological Modelling: Thermodynamic and Statistical Approaches. Casas-vasque J and Jou D, Berlin: Springer,1991, 320-330

[45] Schiessel H and Blumen A. Hierarchical analogues to fractional relaxation equations. J Phys A: Math Gen, 1993, 26, 5057-5069

[46] Ovidiu V M, Matzler R, Nonnenmacher T F and Mackey M C. Universality classes for asymptotic behavior of relaxation processes in systems with dynamical disorder: Dynamical generalizations of stretched exponential. J Math Phys, 1996, 37(5), 2279-2306

[47] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomenomena. Chaos, Solitons and Fractals, 1996, 7, 1461-1477

[48] Schneider W R and Wyss W. Fractional diffusion and wave equations. J Math Phys. 1989, 30, 134-144

[49] Wyss W. Fractional diffusion equation. J Math Phys, 1986, 27(11), 2782-2785

[50] Hilfer R. Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives. J Phys Chem B, 2000. 104, 3914-3917

[51] Matzler R, Barkai E and Klafter J. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium: A fractional Fokker-Planck equatin approach. Physical Review Letters, 1999, 82(18), 3563-3567

[52] Glocke W G and Nonenmacher T F. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics. Biophysical Journal, 1995, 68, 46-53

[53] 徐明瑜, 谭文长. 半规管内流体动力学问题. 中国科学 (A 辑), 2000, 30(3), 272-280 The problems of fluid-dynamics in semicircular canal. Science in China, Series A, 2000, 43

[54] 苏海军. 前庭系统数学模型及分数阶微积分的应用. 山东大学博士学位论文, 2001

[55] Kopf M, Corinth C, Haferkarnp O and Noneenmacher T F. Anomalous diffusion behavior of water in biological tissues. Biophysical Journal, 1996, 70(6), 2950-2958

[56] Srinivas G, Yethiraj A and Bagchi B. Nonexponentiality of time dependent survivial probability and the fractional viscosity dependence of the rate in diffusion controlled reactions in a polymer chain. Journal of chemical physics, 2001, 114(20), 9170-9179

[57] 徐明瑜, 谭文长. 广义二阶流体分数阶反常扩散速度场、应力场及涡旋层的理论分析. 中国科学 (A 辑), 2001, 31(7), 626-638 Theoretical analysic of the velocity field, stress field and vortex sheet of 2nd order fluid with fractional anomalous diffusion. Science in China, Series A, 2001, 44

[58] Fannjiang A and Komorowski T. Fractional Brownian motions and enhanced diffusion in a unidirectional wave-like turbulence. J Stat Phys, 2000, 100(5), 1071-1095

[59] Barkai E and Silbey R J. Fractional Kramers equation. J Phys Chem B, 2000, 104, 3866-3874

[60] Nonenmacher T F. Fractioanl integral and differential for a class of Leúy-type probalility densities. J Phys A: Math Gen, 1990, 23, 697-699

[61] Metzler R and Klafter J. The random walk's guide to anomalous difusion: a fractional dynamics approach. Physics Reports, 2000, 339(1), 1-52

[62] Uchaikin V V. Montroll-Weiss problem, fractional equations and stable distributions. International Journal of Theoretical Physics, 2000, 39(8), 2087-2105

[63] Shlesinger M F. Williams-Watts dielectric relaxation: A fractal time stochastic process. J Stat Phys, 1984, 36(5), 639-648

[64] 段俊生. 分数阶反常扩散方程若干问题及解. 山东大学博士学位论文, 2002

[65] Glockle W G and Nonnenmacher T F. Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity. Macromolecules, 1991, 24(24), 6426-6434

[66] Ross B. Fractional Calculus: an historical apologia for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non integral orders. Mathematics Magazine, 50(3), 115-122

[67] Kathleen Cottrill-Shepherd, Mark Naber. Fractional Differential Forms. Journal of Mathmematica Physics. 2001, 42: 5.

[68] C.S. Kathleen, N. Mark. Fractional Differential Forms II. Journal of Mathematica Physics. 2003.

[69] 谷超豪等. 孤立子理论与应用. 杭州: 浙江科技出版社, 1990.

[70] 张本祥, 孙博文. 社会科学非线性方法论. 哈尔滨: 哈尔滨出版社, 1997.

[71] 郭柏灵，庞小峰．孤立子．北京：科学出版社， 1987.
[72] 李翊神．孤子与可积系统．上海：上海科技出版社， 1999.
[73] Davis H D. The Theory of Linear Operators, Principia Press Bloomington, Indiana, 1936
[74] Igor Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York and London, 1990.
[75] Caputo M. Elasticita e Dissipazione, Zanichelli, Bologna, 1969
[76] Miller K S and Ross B. An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993
[77] Erdélyi A. Highter Transcendental Functions, vol.3, McGraw-Hill, New York,1955.
[78] Rui Y and Hong qing Z. New function of Mittag-Leffler type and its application in the fractional diffusion-wave equation. accepted by Chaos, Solitons & Fractals. (in press)
[79] Podlubny I. Fractional Differential Equation. Academic Press. New York, 1999.
[80] Chen W. and Holm S. Physical interpretation of fractional diffusion-wave equation via lossy media obeying frequency power law. Physics Review Letter (under preparation), CoRR preprint
[81] Hanyga A. Fractional diffusion and wave equation. Conference of Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali. Cortona, 1997.
[82] Saichev A, Zaslavsky G.M. Fractional kinetic equations: solutions and application. Chaos 1997;7(4), 753-764.
[83] Yanovsky V V. Chechkin A V, Schertzer D, et al. Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation[J]. Physica A 2000;282:13-34.
[84] Hilfer R. Exact solutions for a class of fractal time random walk[J]. Fractals 1995;3(1): 211-216.
[85] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation[J].Appl. Math. Lett. 1996;9(6): 23-28.
[86] Mathai A M, Saxena R K. The H-function with Application in Statistics and Other Disciplines[M]. Nwe Delhi: Wiley Eastern Limited, 1978.
[87] Srivastava H M, Gupta K C, Goyal S P. The H-functions of One and Two variables with Applications[M]. New Delhi & Mdras: South Asian Publisher, 1982
[88] H. Flanders, Differential Forms with Applications to the physical Sciences, Dover Publications Inc., New York, 1989.
[89] D. Lovelock and H. Rund, Tensors, Differential Form and Variational Principles, Dover Publications Inc., New York, 1989.
[90] V.E. Tarasov, Fractional generaliztion of gradient and Hamiltonian systems, J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 5929-5443
[91] M.M. Meerschaert, Jeff Mortensen, W.W. Stephen, Fractional vector calculus, submitted Phys.Rev.E March 2005.
[92] 张鸿庆．弹性力学方程组一般解的统一理论．大连工学院学报， 1978, 18(3): 23-47.
[93] G. J. Reid, Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form, determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution. Eur. J .Appl. Math., 1991, 2: 293.
[94] C. Rogers, and W. R. Shadwick, Backlund transformations and their application, academic Press, New York, 1982.
[95] Wahlquist H. D. and Estabrook F. B., Backlund transformations for solitons of the Korteweg-de Vriu equation, Phys. Rev Lett., 1973, 31: 1386-1390.

[96] J. Scott Russell, Report on waves, Fourteen meeting of the British association for the advancement of science, John Murray, London, 1844, 311-390

[97] V. B. Matveev and M. A. Salle, Darboux transformation and Solitons, Berlin:Springer, 1991

[98] 谷超豪等，孤立子理论中的 Darboux 变换及其几何应用，上海：上海科技出版社， 1999

[99] M .Wadati et al., Simple derivation of Backlund transformation from Riccati form of inverse method. Prog. Theor. Phys., 1975, 53: 418

[100] C. H. Gu, A unified explicit form of Backlund transformations for generalized hierarchies of KdV equations, Lett. Math. Phys., 1986, 31: 325

[101] C. H. Gu and Z. X. Zhou, On the Darboux matrices of Bucklund transformations for AKNS systems. Let. Math. Phys., 1987, 13: 179.

[102] 胡星标，李勇， DJKM 方程的 Backlund 变换及非线性叠加公式，数学物理学报， 1991, 11: 164-172.

[103] Hu X. B. and Li Y., Superposition formulae of a fifth-order KdV equation and its modified equation. Acta Math. Appl. Sin., 1988, 4: 46-54.

[104] Hu X. B. and Clarkson P. A., Backlund transformations and nonlinear superposition formulae of a differential-difference KdV equation. J.Phys. A., 1998, 31: 1405-1414.

[105] Hu X. B. and Zhu Z. N., A Backlund transformation and nonlinear superposition formula for the Belov-Chaltikian lattice. J.Phys. A., 1998, 31: 4755-4716.

[106] V.B. Matveev and E. K. Sklyanin, On Backlund transformations for many-body systems. J. Phys. A., 1998, 31: 2241.

[107] Y .B .Zeng, et al., Canonical explicit Backlund transformations with spectrality for constrained flows of soliton hierarchies. Physica A, 2002, 303: 321.

[108] S.Y. Lou and X.B. Hu, J Math Phys 38 (1997) 6401.

[109] E.G. Fan, Commun Theor Phys (Beijing, China) 37(2002)145.

[110] D.J. Huang, D.S. Li and H.Q. Zhang, *N*-fold Darboux transformation and new explicit solutions for the (1+1)-dimensional higher-order Broer-Kaup system, submitted to Chaos, solitons & Fractals.

作者攻读硕士期间发表的论文：

[1] Rui Yu, Hongqing Zhang, "New function of Mittag-Leffler type and its application in the fractional diffusion-wave equation", Chaos, Solitons & Fractals(SCI, 出版中)

[2] Rui Yu, Hongqing Zhang, Applications of the fractional differential forms, submitted to Journal of Geometry and Physics(2005 年 10 月投出)

[3] Rui Yu, Dingjiang Huang and Hongqing Zhang, "Darboux transformation and new soliton-like solutions for the (1+1)-dimensional higher-order Broer-Kaup system", Communications In Theoretical Physics (SCI， 已接受)

致　　谢

本文是在导师张鸿庆教授的悉心指导下完成的．这两年多来，老师的言传身教使我在对数学这门自然语言的认识上有了不断地升华，深刻认识到要做一个出色的数学工作者应该具备良好的数学素养，对数学的历史渊源，指导思想，前沿发展以及国内外的数学家们等各方面数学知识也有了更广，更深的了解．而且，老师孜孜不倦的敬业精神、博大的胸怀和悉心的教导，使我在做人与做学问方面一步一步走向成熟．值此论文完成之际，谨向张老师表示崇高的敬意和诚挚的感谢！愿您健康快乐！

衷心感谢邓新梅老师从上大学至今一直以来对我的栽培和关爱．

特别感谢大连理工大学应用数学系邱瑞峰教授、王仁宏教授、郑斯宁教授对我的鼓励和帮助．

感谢王天明教授、侯中华教授、冯红教授和蔡晶老师等人的帮助！

真诚感谢师兄陈勇师兄、王琪师兄在学习和生活方面对我的殷切关心和帮助，他们的孜孜不倦的学术精神给了我很大的动力．

感谢黄定江师兄在学习和研究中对我的帮助，他认真好学的精神十分值得我学习．

同时感谢其他所有师兄，师姐们的支持和帮助，他们是吕卓生博士、陈怀堂博士、李德生博士、李彪博士、梅建琴博士、王琪博士、黄定江博士、蒋务友博士、于发军博士、任玉杰博士、于亚璇博士、智红艳博士、张晓岭博士、赵雪芹博士、张渊渊博士、郑颖博士、王晓丽硕士、曾昕硕士、王灯山博士、王振博士、谢正博士、雍雪林博士、王宝东硕士、焦小玉硕士、宋丽娜硕士、王静硕士、万莹硕士等。

感谢张凌以及我寝室的姐妹们给予我的关爱、宽容与支持．

最要感谢我的爸爸妈妈！他们是我坚实的后盾．尽管这两年来学习很辛苦，但我知道他们更辛苦，我的好成绩才是对他们的最好回报！希望他们永远健康快乐！

分数微分方程和非线性发展方程中问题的研究

作者： 余睿
学位授予单位： 大连理工大学

参考文献(115条)

1. 林东岱.李文林.虞言林 数学与数学机械化 2001

2. 高小山 数学机械化进展综述(迎接ICM2002特约文章)[期刊论文]-数学进展 2001(5)

3. J F Ritt 查看详情 1934

4. J F Ritt Differential Algebra 1950

5. X S Gao.J Z Zhang.S C Chou Geometry Expert 1998

6. X S Gao An Introduction to Wu's Method of Mechanical Geometry Theorem Proving 1993

7. J Z Wu.Z J Liu 查看详情 1995

8. J Z Wu.Z J Liu 查看详情 1996(06)

9. H Shi 查看详情 1992

10. H Shi 查看详情 1992

11. 石赫 机械化数学引论 1998

12. X D Sun.K Wang.K Wu 查看详情 1996

13. X D Sun.K Wang.K Wu Classification of six-vertex-type solutions of the colored Yang+ Baxter equation 1995

14. Solutions of Yang-Baxter equation with color parameters 1995

15. Wang M L.Li Z B 查看详情 1995

16. 李志斌.张善卿 非线性波方程准确孤立波解的符号计算 1997(01)

17. Z B Li 查看详情 1997

18. Z B Li.H Shi 查看详情 1996(01)

19. Z B Li 查看详情 1998

20. 朱思铭.施齐焉 现代数学和力学(MMM-Ⅶ) 1997

21. 范恩贵 查看详情 1998

22. 闫振亚 查看详情[学位论文]博士 2002

23. 陈勇 查看详情[学位论文]博士 2003

24. 郑学东 查看详情 2003

25. Erich Kaltofen Challenges of Symbolic Computation:My Favorite Open Problems 2000

26. B Buchberger.G E Collins.R Loos Computer Algebra - Symbolic and Algebraic Compu tation 1988

27. R H Risch 查看详情 1969

28. E R Berlekamp Factoring polynomials over large finite fields 1970

29. W S Brown On the partition function of a finite set 1971

30. Gospel R W Decision Procedures for Indefinite Hypergeometric Summation 1978

31. A K Lenstra Factoring multivariate polynomials over algebraic number fields 1987

32. A K Lenstra.H W Jr Lenstra.L Lovasz Factoring polynomials with rational coefficients 1982

33. E Kaltofen.B Trager Computing with polynomials given by black boxes for their

evaluations:greatest common divisors,factorization,separation of numerators and denominators 1990

34. V Shoup A new polynomial factorization algorithm and its implementation 1995

35. Ross B The Fractional Calculus and Its Application 1975

36. Oldham K B.Spanier J The Fractional Calculus

37. Keith B Oldham.Jerome Spanier The Fractional Calculus 1974

38. Mandelbrot B B The Fractal Geometry of Nature 1982

39. 高安秀树 分数维 1989

40. 王东生.曹磊 混沌、分形以及应用 1995

41. Carpinteri A.Mainardi F Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics 1997

42. Nigmatullin R R The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry 1986

43. Rocco A.West B J Fractional calculus and the evolution of fractal phenomena 1999(03)

44. Ren F Y.Liang J R.Wang X T The determination of the diffusion kernel on fractals and fractional diffusion equation for transport phenomena in random media 1999(03)

45. Kolwankar K M Fractas and differential equations of fractional order 1998(04)

46. Nonnenmacher T F.Metzler R On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications 1995(03)

47. Friendvich C Relaxation function of rheological constitutive equations with fractional derivatives:Thermodynamical constraints 1991

48. Schiessel H.Blumen A Hierarchical analogues to fractional relaxation equations 1993

49. Ovidiu V M.Matzler R.Nonnenmacher T F.Mackey M C Universality classes for asymptotic behavior of relaxation processes in systems with dynamical disorder:Dynamical generalizations of stretched exponential 1996(05)

50. Mainardi F Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomenomena 1996

51. Schneider W R.Wyss W Fractional diffusion and wave equations 1989

52. Wyss W Fractional diffusion equation 1986(11)

53. Hilfer R Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives 2000

54. Matzler R.Barkai E.Klafter J Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium:A fractional Fokker-Planck equatin approach 1999(18)

55. Glocke W G.Nonenmacher T F A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics 1995

56. 徐明瑜.谭文长 半规管内流体动力学问题[期刊论文]-中国科学A辑 2000(3)

57. XU Mingyu.TAN Wenchang The problem of fluid-dynamics in semicircular canal[期刊论文]-中国科学A辑（英文版） 2000(5)

58. 苏海军 前庭系统数学模型及分数阶微积分的应用[学位论文]博士 2001

59. Kopf M.Corinth C.Haferkarnp O.Noneenmacher T F Anomalous diffusion behavior of water in biological tissues 1996(06)

60. Srinivas G.Yethiraj A.Bagchi B Nonexponentiality of time dependent survivial probability and the fractional viscosity dependence of the rate in diffusion controlled reactions in a polymer chain

2001(20)

61.徐明瑜.谭文长 广义二阶流体分数阶反常扩散速度场、应力场及涡旋层的理论分析[期刊论文]-中国科学A辑 2001(7)

62.徐明瑜.谭文长 Theoretical analysis of the velocity field, stress field and vortex sheet of generalized second order fluid withfractional anomalous diffusion[期刊论文]-中国科学A辑(英文版) 2001(11)

63.Fannjiang A.Komorowski T Fractional Brownian motions and enhanced diffusion in a unidi rectional wave-like turbulence 2000(05)

64.Barkai E.Silbey R J Fractional Kramers equation 2000

65.Nonenmacher T F Fractioanl integral and differential for a class of Levy-type probalility densities 1990

66.Metzler R.Klafter J The random walk's guide to anomalous difusion:a fractional dynamics approach 2000(01)

67.Uchaikin V V Montroll-Weiss problem,fractional equations and stable distributions 2000(08)

68.Shlesinger M F Williams-Watts dielectric relaxation:A fractal time stochastic process 1984(05)

69.段俊生 分数阶反常扩散方程若干问题及解[学位论文]博士 2002

70.Glockle W G.Nounenmacher T F Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity 1991(24)

71.Ross B Fractional Calculus:an historical apologia for the development of a calculus using differen tiation and antidifferentiation of non integral orders

72.Kathleen Cottrill-Shepherd.Mark Naber Fractional Differential Forms 2001(05)

73.C S Kathleen.N Mark Fractional Differential Forms Ⅱ 2003

74.谷超豪 孤立子理论与应用 1990

75.张本祥.孙博文 社会科学非线性方法论 1997

76.郭柏灵.庞小峰 孤立子 1987

77.李翊神 孤子与可积系统 1999

78.Davis H D The Theory of Linear Operators 1936

79.Igor Podlubny Fractional Differential Equations 1990

80.Caputo M Elasticita e Dissipazione 1969

81.Miller K S.Ross B An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations 1993

82.Erdélyi A Highter Transcendental Functions 1955

83.Rui Y.Hong qing Z New function of Mittag-Leffler type and its application in the fractional diffusion-wave equation.accepted by Chaos

84.Podlubny I Fractional Differential Equation 1999

85.Chen W.Holm S Physical interpretation of fractional diffusion-wave equation via lossy media obeying frequency power law

86.Hanyga A Fractional diffusion and wave equation 1997

87. Saichev A.Zaslavsky G M Fractional kinetic equations:solutions and application 1997(04)

88. Yanovsky V V.Chechkin A V.Schertzer D Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker Planck equation 2000

89. Hilfer R Exact solutions for a class of fractal time random walk 1995(01)

90. Mainardi F The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation 1996(06)

91. Mathai A M.Saxena R K The H-function with Application in Statistics and Other Disciplines 1978

92. Srivastava H M.Gupta K C.Goyal S P The H-functions of One and Two variables with Applica tions 1982

93. H Flanders Differential Forms with Applications to the physical Sciences 1989

94. D Lovelock.H Rund Tensors,Differential Form and Variational Principles 1989

95. V E Tarasov Fractional generaliztion of gradient and Hamiltonian systems 2005

96. M M Meerschaert.Jeff Mortensen.W W Stephen Fractional vector calculus 2005

97. 张鸿庆 弹性力学方程组一般解的统一理论 1978(03)

98. G J Reid Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form,determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution 1991

99. C Rogers.W R Shadwick Backlund transformations and their application 1982

100. Wahlquist H D.Estabrook F B Backlund transformations for solitons of the Korteweg-de Vriu equation 1973

101. J Scott Russell Report on waves 1844

102. V B Matveev.M A Salle Darboux transformation and Solitons 1991

103. 谷超豪 孤立子理论中的Darboux变换及其几何应用 1999

104. M Wadati Simple derivation of Backlund transformation from Riccati form of inverse method 1975

105. C H Gu A unified explicit form of Backlund transformations for generalized hierarchies of KdV equations 1986

106. C H Gu.Z X Zhou On the Darboux matrices of Bucklund transformations for AKNS systems 1987

107. 胡星标.李勇 DJKM方程的Backlund变换及非线性叠加公式 1991

108. Hu X B.Li Y Superposition formulae of a fifth-order KdV equation and its modified equation 1988

109. Hu X B.Clarkson P A Backlund transformations and nonlinear superposition formulae of a differential-difference KdV equation 1998

110. Hu X B.Zhu Z N A Backlund transformation and nonlinear superposition formula for the Belov-Chaltikian lattice 1998

111. V B Matveev.E K Sklyanin On Backlund transformations for many-body systems 1998

112. Y B Zeng Canonical explicit Backlund transformations with spectrality for constrained flows of soliton hierarchies 2002

113. S Y Lou.X B Hu 查看详情 1997

114. FAN En-gui Solving Kadomtsev-Petviashvili Equation via a New Decomposition and Darboux Transformation[期刊论文]-理论物理通讯(英文版) 2002(2)

115. D J Huang.D S Li.H Q Zhang N-fold Darboux transformation and new explicit solutions for the

(1+1)-dimensional higher-order Broer-Kaup system

本文读者也读过(9条)

1. 郑祖庥 分数微分方程的发展和应用[会议论文]-2008

2. 郑祖庥.ZHENG Zu-xiu 分数微分方程的发展和应用[期刊论文]-徐州师范大学学报（自然科学版）2008,26(2)

3. 王静 用AC=BD理论研究偏微分方程（组）的求精确解方法[学位论文]2006

4. 姚庆六.YAO Qing-liu 非线性分数微分方程解的若干存在性结论[期刊论文]-高校应用数学学报A辑2005,20(3)

5. 朱星星 非自治发展方程与分数次微分方程的解[学位论文]2009

6. 王长有.李林林.龚辉.王术.WANG Chang-you.LI Lin-lin.GONG Hui.WANG Shu 一类非线性分数微分方程正解的存在唯一性[期刊论文]-应用数学2009,22(4)

7. 朱丽娟 分数微分方程的边值问题与分数脉冲微分方程解的存在性问题[学位论文]2009

8. 王灯山 一类非线性发展方程的非行波解的构造[学位论文]2005

9. 王春梅 非线性常微分方程边值问题的解及其应用[学位论文]2007

引证文献(4条)

1.余睿 分数微分方程和非线性发展方程中问题的研究[学位论文]硕士 2005

2.余睿 分数微分方程和非线性发展方程中问题的研究[学位论文]硕士 2005

3.余睿 分数微分方程和非线性发展方程中问题的研究[学位论文]硕士 2005

4.余睿 分数微分方程和非线性发展方程中问题的研究[学位论文]硕士 2005

本文链接：http://d.wanfangdata.com.cn/Thesis_Y824300.aspx